Miary niezmiennicze na $\mathbb{R}^n$- podejście probabilistyczne

Dominik Kutek

7.12.2020

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Zakładamy, że wszystkie zmienne losowe X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ rozumiane są jako $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mierzalne (jak i również miary rozpatrujemy na $\mathbb{R}^n$ z $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich)

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Zakładamy, że wszystkie zmienne losowe X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ rozumiane są jako $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mierzalne (jak i również miary rozpatrujemy na $\mathbb{R}^n$ z $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich)
- Z prawdopodobieństwem μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ możemy związać tzw. funkcję (funkcjonał) charakterystyczną $\varphi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$

W przypadku gdy $\mu = \mu_X$, piszemy $\varphi_\mu = \varphi_X = \mathbb{E}[\exp(i\langle \cdot, X\rangle)]$

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Zakładamy, że wszystkie zmienne losowe X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ rozumiane są jako $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mierzalne (jak i również miary rozpatrujemy na $\mathbb{R}^n$ z $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich)
- Z prawdopodobieństwem μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ możemy związać tzw. funkcję (funkcjonał) charakterystyczną $\varphi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ daną wzorem
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$
W przypadku gdy $\mu = \mu_X$, piszemy $\varphi_\mu = \varphi_X = \mathbb{E}[\exp(i\langle \cdot, X\rangle)]$
- φ_μ jest funkcją ciągłą, spełniającą $\varphi_\mu(0) = 1$ i $\|\varphi_\mu\|_\infty \leq 1$

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Zakładamy, że wszystkie zmienne losowe X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ rozumiane są jako $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mierzalne (jak i również miary rozpatrujemy na $\mathbb{R}^n$ z $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich)
- Z prawdopodobieństwem μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ możemy związać tzw. funkcję (funkcjonał) charakterystyczną $\varphi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ daną wzorem
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$
W przypadku gdy $\mu = \mu_X$, piszemy $\varphi_\mu = \varphi_X = \mathbb{E}[\exp(i\langle \cdot, X\rangle)]$
- φ_μ jest funkcją ciągłą, spełniającą $\varphi_\mu(0) = 1$ i $\|\varphi_\mu\|_\infty \leq 1$
- Funkcja charakterystyczna jednoznacznie wyznacza rozkład tzn. $X \sim Y \iff \varphi_X \equiv \varphi_Y$

Preliminaria

- Mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Zakładamy, że wszystkie zmienne losowe X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ rozumiane są jako $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mierzalne (jak i również miary rozpatrujemy na $\mathbb{R}^n$ z $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich)
- Z prawdopodobieństwem μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ możemy związać tzw. funkcję (funkcjonał) charakterystyczną $\varphi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ daną wzorem
$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$
W przypadku gdy $\mu = \mu_X$, piszemy $\varphi_\mu = \varphi_X = \mathbb{E}[\exp(i\langle \cdot, X\rangle)]$
- φ_μ jest funkcją ciągłą, spełniającą $\varphi_\mu(0) = 1$ i $\|\varphi_\mu\|_\infty \leq 1$
- Funkcja charakterystyczna jednoznacznie wyznacza rozkład tzn. $X \sim Y \iff \varphi_X \equiv \varphi_Y$
- Dla X, Y niezależnych mamy $\varphi_{X+Y} \equiv \varphi_X \cdot \varphi_Y$

Miary Niezmiennicze - wprowadzenie

Załóżmy, że mamy miarę μ na przestrzeni $(E, \mathcal{B}(E))$. Dążymy do nadania sensu "niezmienniczości" na pewne działania.

Miary Niezmiennicze - wprowadzenie

Załóżmy, że mamy miarę μ na przestrzeni $(E, \mathcal{B}(E))$. Dążymy do nadania sensu "niezmienniczości" na pewne działania.

W przypadku $E = \mathbb{R}^n$ możemy mówić na przykład o miarach niezmienniczych na przesunięcia, czyli spełniających $\mu(A) = \mu(A + x)$ dla A borelowskich i $x \in \mathbb{R}^n$. Z dokładnością do stałej $c \in [0, \infty]$, jedyną taką miarą na $\mathbb{R}^n$ jest miara Lebesgue'a.

Miary Niezmiennicze - wprowadzenie

Załóżmy, że mamy miarę μ na przestrzeni $(E, \mathcal{B}(E))$. Dążymy do nadania sensu "niezmienniczości" na pewne działania.

W przypadku $E = \mathbb{R}^n$ możemy mówić na przykład o miarach niezmienniczych na przesunięcia, czyli spełniających $\mu(A) = \mu(A + x)$ dla A borelowskich i $x \in \mathbb{R}^n$. Z dokładnością do stałej $c \in [0, \infty]$, jedyną taką miarą na $\mathbb{R}^n$ jest miara Lebesgue'a.

Jeśli za $T_x : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ przyjąc $T_x(A) = A - x$, poprzednia własność przepiszę się w terminach $\mu(A) = \mu(T_x^{-1}[A])$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, A borelowskich. Ogólniej więc, możemy zapytać czy μ jest niezmiennicza na działanie rodziny $\mathcal{T} := \{T_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$, mając na myśli równości $\mu(A) = \mu(T_\alpha^{-1}[A])$ dla wszystkich $\alpha \in \mathcal{A}$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$

Miary Niezmiennicze - wprowadzenie

Załóżmy, że mamy miarę μ na przestrzeni $(E, \mathcal{B}(E))$. Dążymy do nadania sensu "niezmienniczości" na pewne działania.

W przypadku $E = \mathbb{R}^n$ możemy mówić na przykład o miarach niezmienniczych na przesunięcia, czyli spełniających $\mu(A) = \mu(A + x)$ dla A borelowskich i $x \in \mathbb{R}^n$. Z dokładnością do stałej $c \in [0, \infty]$, jedyną taką miarą na $\mathbb{R}^n$ jest miara Lebesgue'a.

Jeśli za $T_x : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ przyjąc $T_x(A) = A - x$, poprzednia własność przepiszę się w terminach $\mu(A) = \mu(T_x^{-1}[A])$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, A borelowskich. Ogólniej więc, możemy zapytać czy μ jest niezmiennicza na działanie rodziny $\mathcal{T} := \{T_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$, mając na myśli równości $\mu(A) = \mu(T_\alpha^{-1}[A])$ dla wszystkich $\alpha \in \mathcal{A}$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$

Nas interesować będzie niezmienniczość na izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$, czyli grupę $O(n)$ macierzy ortogonalnych

Sprecyzowaliśmy na działanie jakiej grupy przekształceń będziemy rozważać niezmienniczość. Teraz sprecyzujemy na jakich zbiorach i o jakich własnościach te miary będziemy rozważać:

Sprecyzowaliśmy na działanie jakiej grupy przekształceń będziemy rozważać niezmienniczość. Teraz sprecyzujemy na jakich zbiorach i o jakich własnościach te miary będziemy rozważać:

- Miary na $O(n)$. W tym wypadku pokażemy istnienie i jednoznaczność niezmienniczego na działanie grupowe prawdopodobieństwa π na $O(n)$

Sprecyzowaliśmy na działanie jakiej grupy przekształceń będziemy rozważać niezmienniczość. Teraz sprecyzujemy na jakich zbiorach i o jakich własnościach te miary będziemy rozważać:

- Miary na $O(n)$. W tym wypadku pokażemy istnienie i jednoznaczność niezmienniczego na działanie grupowe prawdopodobieństwa π na $O(n)$
- Miary na $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Scharakteryzujemy niezmienniczą na izometrie liniowe miarę probabilistyczną μ na $\mathbb{S}^{n-1}$.

Sprecyzowaliśmy na działanie jakiej grupy przekształceń będziemy rozważać niezmienniczość. Teraz sprecyzujemy na jakich zbiorach i o jakich własnościach te miary będziemy rozważać:

- Miary na $O(n)$. W tym wypadku pokażemy istnienie i jednoznaczność niezmienniczego na działanie grupowe prawdopodobieństwa π na $O(n)$

- Miary na $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Scharakteryzujemy niezmienniczą na izometrie liniowe miarę probabilistyczną μ na $\mathbb{S}^{n-1}$.

- Miary na $\mathbb{R}^n$ będące iloczynem produktowym pewnych n miar na $\mathbb{R}$. Podobnie, scharakteryzujemy niezmienniczą na izometrie liniowe, produktową miarę unormowaną γ_n

Miary niezmiennicze- definicje

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $\mathbb{R}^n$ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$.

Miary niezmiennicze- definicje

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $\mathbb{R}^n$ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$.
Dualnie: Gdy μ jest miarą na $\mathbb{R}^n$, to powiemy że μ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdych $G \in O(n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $\mu(GB) = \mu(B)$

Miary niezmiennicze- definicje

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $\mathbb{R}^n$ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$.
Dualnie: Gdy μ jest miarą na $\mathbb{R}^n$, to powiemy że μ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdych $G \in O(n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $\mu(GB) = \mu(B)$

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $O(n)$ jest lewostronnie niezmiennicza (na działanie grupowe) (odp. prawostronnie, obustronnie), jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$ (odp. $XG \sim X$, $GX \sim X \sim XG$)

Miary niezmiennicze- definicje

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $\mathbb{R}^n$ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$.
Dualnie: Gdy μ jest miarą na $\mathbb{R}^n$, to powiemy że μ jest (rotacyjnie) niezmiennicza, jeśli dla każdych $G \in O(n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $\mu(GB) = \mu(B)$

Definicja

Powiemy, że zmienna losowa X na $O(n)$ jest lewostronnie niezmiennicza (na działanie grupowe) (odp. prawostronnie, obustronnie), jeśli dla każdej $G \in O(n)$ zachodzi $GX \sim X$ (odp. $XG \sim X$, $GX \sim X \sim XG$)
Dualnie: Miara π na $O(n)$ jest lewostronnie niezmiennicza (na działanie grupowe) (odp. prawostronnie, obustronnie), jeśli dla każdych $G \in O(n), R \in \mathcal{B}(O(n))$ zachodzi $\pi(GR) = \pi(R)$ (odp. $\pi(RG) = \pi(R)$, $\pi(RG) = \pi(R) = \pi(GR)$)

Miara Haara

Twierdzenie (Miara Haara)

Na $O(n)$ istnieje miara probabilistyczna π, która jest obustronnie niezmiennicza.

Biorąc macierz losową X na $\mathbb{R}^{n^2}$ z każdą współrzędną i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$ (nazwijmy jej kolumny $X_i = (X_{k,i})_{k\in\{1,\dots,n\}}$), to wówczas X ma rozkład ν obustronnie niezmienniczy. Istotnie, biorąc $G \in O(n), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n^2})$ mamy $\mathbb{P}(GX \in A) = \mathbb{P}(X \in G^T A)$ oraz $\mathbb{P}(XG \in A) = \mathbb{P}(X \in AG^T)$ skąd

Twierdzenie (Miara Haara)

Na $O(n)$ istnieje miara probabilistyczna π, która jest obustronnie niezmiennicza.

Biorąc macierz losową X na $\mathbb{R}^{n^2}$ z każdą współrzędną i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$ (nazwijmy jej kolumny $X_i = (X_{k,i})_{k\in\{1,\dots,n\}}$), to wówczas X ma rozkład ν obustronnie niezmienniczy. Istotnie, biorąc $G \in O(n), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n^2})$ mamy $\mathbb{P}(GX \in A) = \mathbb{P}(X \in G^T A)$ oraz $\mathbb{P}(XG \in A) = \mathbb{P}(X \in AG^T)$ skąd

$$\mathbb{P}(GX \in A) = \int_{G^T A} g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \int_A g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\mathbb{P}(XG \in A) = \int_{AG^T} g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \int_A g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Twierdzenie (Miara Haara)

Na $O(n)$ istnieje miara probabilistyczna π, która jest obustronnie niezmiennicza.

Biorąc macierz losową X na $\mathbb{R}^{n^2}$ z każdą współrzędną i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$ (nazwijmy jej kolumny $X_i = (X_{k,i})_{k\in\{1,\dots,n\}}$), to wówczas X ma rozkład ν obustronnie niezmienniczy. Istotnie, biorąc $G \in O(n), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n^2})$ mamy $\mathbb{P}(GX \in A) = \mathbb{P}(X \in G^T A)$ oraz $\mathbb{P}(XG \in A) = \mathbb{P}(X \in AG^T)$ skąd

$$\mathbb{P}(GX \in A) = \int_{G^T A} g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \int_A g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\mathbb{P}(XG \in A) = \int_{AG^T} g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \int_A g(\|x\|) d\lambda_{n^2}(x) = \mathbb{P}(X \in A)$$

No to mamy rozkład niezmienniczy... tylko, że nie na $O(n)$.

Stosując do X ortogonalizację Gramma-Schmidta (na zbiorze pełnej miary), otrzymujemy ortogonalną macierz Y. Co można powiedzieć o jej kolumnach?

Stosując do X ortogonalizację Gramma-Schmidta (na zbiorze pełnej miary), otrzymujemy ortogonalną macierz Y. Co można powiedzieć o jej kolumnach?

k'ta kolumna Y to $Y_k := X_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\|Y_j\|^2} \langle X_k, Y_j \rangle Y_j$. Skąd łatwo otrzymujemy jak wygląda GY

Stosując do X ortogonalizację Gramma-Schmidta (na zbiorze pełnej miary), otrzymujemy ortogonalną macierz Y. Co można powiedzieć o jej kolumnach?

k'ta kolumna Y to $Y_k := X_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\|Y_j\|^2}\langle X_k, Y_j\rangle Y_j$. Skąd łatwo otrzymujemy jak wygląda GY

Co by się stało, gdyby zastosować ortogonalizację G-S do zmiennej GX (odpowiednio XG)? Druga współrzędna byłaby równa $Z_2 := GX_2 - \frac{1}{\|GX_1\|^2}\langle GX_1, GX_2\rangle GX_1 = GX_2 - \frac{1}{\|X_1\|^2}\langle X_1, X_2\rangle GX_1$.

Oznacza to, że $Z_2 = GY_2$. Indukcyjnie dostaniemy $Z_k = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Z_j, GX_k\rangle}{\|Z_j\|^2} Z_j = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Y_j, X_k\rangle}{\|Y_j\|^2} GY_j = GY_k$, czyli $Z = GY$.

Stosując do X ortogonalizację Gramma-Schmidta (na zbiorze pełnej miary), otrzymujemy ortogonalną macierz Y. Co można powiedzieć o jej kolumnach?

k'ta kolumna Y to $Y_k := X_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\|Y_j\|^2} \langle X_k, Y_j \rangle Y_j$. Skąd łatwo otrzymujemy jak wygląda GY

Co by się stało, gdyby zastosować ortogonalizację G-S do zmiennej GX (odpowiednio XG)? Druga współrzędna byłaby równa $Z_2 := GX_2 - \frac{1}{\|GX_1\|^2} \langle GX_1, GX_2 \rangle GX_1 = GX_2 - \frac{1}{\|X_1\|^2} \langle X_1, X_2 \rangle GX_1$.

Oznacza to, że $Z_2 = GY_2$. Indukcyjnie dostaniemy $Z_k = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Z_j, GX_k \rangle}{\|Z_j\|^2} Z_j = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Y_j, X_k \rangle}{\|Y_j\|^2} GY_j = GY_k$, czyli $Z = GY$.

Pokazaliśmy właśnie, że zastosowanie ortogonalizacji G-S do X, a następnie przemnożenie przez G, jest tym samym (w sensie równości prawie na pewno) co przemnożenie X przez G, a następnie zastosowanie ortogonalizacji G-S.

Stosując do X ortogonalizację Gramma-Schmidta (na zbiorze pełnej miary), otrzymujemy ortogonalną macierz Y. Co można powiedzieć o jej kolumnach?
k'ta kolumna Y to $Y_k := X_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\|Y_j\|^2}\langle X_k, Y_j\rangle Y_j$. Skąd łatwo otrzymujemy jak wygląda GY
Co by się stało, gdyby zastosować ortogonalizację G-S do zmiennej GX (odpowiednio XG)? Druga współrzędna byłaby równa
$Z_2 := GX_2 - \frac{1}{\|GX_1\|^2}\langle GX_1, GX_2\rangle GX_1 = GX_2 - \frac{1}{\|X_1\|^2}\langle X_1, X_2\rangle GX_1$.
Oznacza to, że $Z_2 = GY_2$. Indukcyjnie dostaniemy
$Z_k = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Z_j, GX_k\rangle}{\|Z_j\|^2} Z_j = GX_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle Y_j, X_k\rangle}{\|Y_j\|^2} GY_j = GY_k$,
czyli $Z = GY$.
Pokazaliśmy właśnie, że zastosowanie ortogonalizacji G-S do X, a następnie przemnożenie przez G, jest tym samym (w sensie równości prawie na pewno) co przemnożenie X przez G, a następnie zastosowanie ortogonalizacji G-S. Zatem skoro mamy $X \sim GX \sim XG$ tak stosując ortogonalizację $G-S$ do każdej z tych 3 rzeczy, dostaniemy również $Y \sim GY \sim YG$. Szukanym prawdopodobieństwem π jest więc rozkład zmiennej Y. $\square$

Twierdzenie

Miara Haara na $O(n)$ jest jedyna. Dokładniej, jeśli π, σ są dwiema unormowanymi miarami obustronnie niezmienniczymi na $O(n)$, to $\pi = \sigma$

Biorąc dowolny zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(O(n))$ dostaniemy

$$\pi(B) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(G) d\pi(G) d\sigma(R)$$

Twierdzenie

Miara Haara na $O(n)$ jest jedyna. Dokładniej, jeśli π, σ są dwiema unormowanymi miarami obustronnie niezmienniczymi na $O(n)$, to $\pi = \sigma$

Biorąc dowolny zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(O(n))$ dostaniemy

$$\pi(B) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(G) d\pi(G) d\sigma(R) =$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\pi(G) d\sigma(R)$$

Twierdzenie

Miara Haara na $O(n)$ jest jedyna. Dokładniej, jeśli π, σ są dwiema unormowanymi miarami obustronnie niezmienniczymi na $O(n)$, to $\pi = \sigma$

Biorąc dowolny zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(O(n))$ dostaniemy

$$\pi(B) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(G) d\pi(G) d\sigma(R) =$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\pi(G) d\sigma(R) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\sigma(R) d\pi(G)$$

Twierdzenie

Miara Haara na $O(n)$ jest jedyna. Dokładniej, jeśli π, σ są dwiema unormowanymi miarami obustronnie niezmienniczymi na $O(n)$, to $\pi = \sigma$

Biorąc dowolny zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(O(n))$ dostaniemy

$$\pi(B) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(G) d\pi(G) d\sigma(R) =$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\pi(G) d\sigma(R) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\sigma(R) d\pi(G)$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(R) d\sigma(R) d\pi(G) = \sigma(B)$$

Twierdzenie

Miara Haara na $O(n)$ jest jedyna. Dokładniej, jeśli π, σ są dwiema unormowanymi miarami obustronnie niezmienniczymi na $O(n)$, to $\pi = \sigma$

Biorąc dowolny zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(O(n))$ dostaniemy

$$\pi(B) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(G) d\pi(G) d\sigma(R) =$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\pi(G) d\sigma(R) = \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(RG) d\sigma(R) d\pi(G)$$

$$= \int_{O(n)} \int_{O(n)} 1_B(R) d\sigma(R) d\pi(G) = \sigma(B)$$

Z dowolności B borelowskiego mamy $\pi = \sigma$ $\square$

Twierdzenie (Jednoznaczność unormowanej miary niezmienniczej na $\mathbb{S}^{n-1}$)

Jedyną miarą unormowaną na $\mathbb{S}^{n-1}$, która jest rotacyjnie niezmiennicza, jest unormowana miara jednostajna na $\mathbb{S}^{n-1}$.

Rotacyjna niezmienniczość na $\mathbb{S}^{n-1}$

Twierdzenie (Jednoznaczność unormowanej miary niezmienniczej na $\mathbb{S}^{n-1}$)

Jedyną miarą unormowaną na $\mathbb{S}^{n-1}$, która jest rotacyjnie niezmiennicza, jest unormowana miara jednostajna na $\mathbb{S}^{n-1}$.

Niech μ- rozkład jednostajny na $\mathbb{S}^{n-1}$, ν- unormowany rozkład rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{S}^{n-1}$, zaś $\pi-$ miara Haara na $O(n)$. Niech X, Y, R będą zmiennymi losowymi o powyższych rozkładach odpowiednio. Weźmy dowolny $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy taką rotację G, że $Gx = y$, więc $\mathbb{P}(Rx \in A) = \mathbb{P}(RGx \in A) = \mathbb{P}(Ry \in A)$ poprzez prawostronną niezmienniczość.

Rotacyjna niezmienniczość na $\mathbb{S}^{n-1}$

Twierdzenie (Jednoznaczność unormowanej miary niezmienniczej na $\mathbb{S}^{n-1}$)

Jedyną miarą unormowaną na $\mathbb{S}^{n-1}$, która jest rotacyjnie niezmiennicza, jest unormowana miara jednostajna na $\mathbb{S}^{n-1}$.

Niech μ- rozkład jednostajny na $\mathbb{S}^{n-1}$, ν- unormowany rozkład rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{S}^{n-1}$, zaś $\pi-$ miara Haara na $O(n)$. Niech X, Y, R będą zmiennymi losowymi o powyższych rozkładach odpowiednio. Weźmy dowolny $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy taką rotację G, że $Gx = y$, więc $\mathbb{P}(Rx \in A) = \mathbb{P}(RGx \in A) = \mathbb{P}(Ry \in A)$ poprzez prawostronną niezmienniczość.
Reszta dowodu opiera się na obserwacji, że przekształcenie $x \to Rx$ pozwoli(w odpowiednim sensie) przenieść miarę Haara na miarę rotacyjnie niezmienniczą na $\mathbb{S}^{n-1}$

Zauważamy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)\times\mathbb{S}^{n-1}} 1_A(Gx)d(\pi \otimes \mu)(G, x)$$

$\mathbb{P}(Rx \in A) = \mathbb{P}(Ry \in A)$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ *oraz* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$

Zauważamy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)\times\mathbb{S}^{n-1}} 1_A(Gx)d(\pi \otimes \mu)(G, x)$$

Używając Fubiniego na dwa sposoby, dostaniemy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)} \mathbb{P}(GX \in A)d\pi(G) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$\mathbb{P}(Rx \in A) = \mathbb{P}(Ry \in A)$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ *oraz* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$

Zauważamy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)\times\mathbb{S}^{n-1}} 1_A(Gx)d(\pi \otimes \mu)(G, x)$$

Używając Fubiniego na dwa sposoby, dostaniemy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)} \mathbb{P}(GX \in A)d\pi(G) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{P}(Rx \in A)d\mu(x) = \mathbb{P}(Rv \in A)$$

gdzie $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ dowolny.

Zauważamy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)\times\mathbb{S}^{n-1}} 1_A(Gx)d(\pi \otimes \mu)(G, x)$$

Używając Fubiniego na dwa sposoby, dostaniemy

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{O(n)} \mathbb{P}(GX \in A)d\pi(G) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\mathbb{P}(RX \in A) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{P}(Rx \in A)d\mu(x) = \mathbb{P}(Rv \in A)$$

gdzie $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ dowolny.
Nie wykorzystywaliśmy nic poza rotacyjną niezmienniczością X.
Zatem to samo można otrzymać dla Y, to znaczy

$$\nu(A) = \mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(Rv \in A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mu(A)$$

$\square$

Rozkłady rotacyjnie niezmiennicze - własności

Z podstawowych faktów, jeśli $X = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy równość rozkładów $\langle a, X \rangle \sim X_1$ (W szczególności $\{\pm X_k\}_{k\in\{1,...,n\}}$ mają te same rozkłady).

Rozkłady rotacyjnie niezmiennicze - własności

Z podstawowych faktów, jeśli $X = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy równość rozkładów $\langle a, X\rangle \sim X_1$ (W szczególności $\{\pm X_k\}_{k\in\{1,...,n\}}$ mają te same rozkłady).

Dla dowolnej macierzy ortogonalej G oraz $t \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt,GX\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt,X\rangle}] = \varphi_X(Gt)$$

W szczególności więc, obierając dla $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taką rotację G_t dla której $G_t(\frac{t}{\|t\|}) = e_1$ otrzymujemy $\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$.

Rozkłady rotacyjnie niezmiennicze - własności

Z podstawowych faktów, jeśli $X = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy równość rozkładów $\langle a, X \rangle \sim X_1$ (W szczególności $\{\pm X_k\}_{k \in \{1,...,n\}}$ mają te same rozkłady).
Dla dowolnej macierzy ortogonalej G oraz $t \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt, GX \rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt, X \rangle}] = \varphi_X(Gt)$$

W szczególności więc, obierając dla $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taką rotację G_t dla której $G_t(\frac{t}{\|t\|}) = e_1$ otrzymujemy $\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$.
Również w drugą stronę, jeśli $\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$ to X jest rotacyjnie niezmiennicza, ponieważ
$\varphi_{GX}(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, GX \rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle G^T t, X \rangle}] = \varphi_X(G^T t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$

Rozkłady rotacyjnie niezmiennicze - własności

Z podstawowych faktów, jeśli $X = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ mamy równość rozkładów $\langle a, X\rangle \sim X_1$ (W szczególności $\{\pm X_k\}_{k\in\{1,...,n\}}$ mają te same rozkłady).

Dla dowolnej macierzy ortogonalej G oraz $t \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt,GX\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle Gt,X\rangle}] = \varphi_X(Gt)$$

W szczególności więc, obierając dla $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taką rotację G_t dla której $G_t(\frac{t}{\|t\|}) = e_1$ otrzymujemy $\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$.

Również w drugą stronę, jeśli $\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$ to X jest rotacyjnie niezmiennicza, ponieważ
$\varphi_{GX}(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,GX\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle G^T t,X\rangle}] = \varphi_X(G^T t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$

Pokazaliśmy właśnie, że X niezmiennicza $\iff \varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(\|t\|)$

Zauważmy, że z charakteryzacji poprzez funkcje charakterystyczne wynika, że jeśli X jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to również każdy jego pod-wektor długości $k \leq n$ jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^k$

Zauważmy, że z charakteryzacji poprzez funkcje charakterystyczne wynika, że jeśli X jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to również każdy jego pod-wektor długości $k \leq n$ jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^k$
Jeśli $Y = (X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ jest tym pod-wektorem, to $\varphi_Y(t) = \varphi_X(t^*) = \varphi_{X_1}(\|t^*\|) = \varphi_{X_{i_1}}(\|t\|)$, gdzie t^* jest wektorem w $\mathbb{R}^n$, powstającym przez rozszerzenie $t \in \mathbb{R}^k$ dopisując zera.

Zauważmy, że z charakteryzacji poprzez funkcje charakterystyczne wynika, że jeśli X jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$, to również każdy jego pod-wektor długości $k \leq n$ jest niezmienniczy na $\mathbb{R}^k$
Jeśli $Y = (X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ jest tym pod-wektorem, to $\varphi_Y(t) = \varphi_X(t^*) = \varphi_{X_1}(\|t^*\|) = \varphi_{X_{i_1}}(\|t\|)$, gdzie t^* jest wektorem w $\mathbb{R}^n$, powstającym przez rozszerzenie $t \in \mathbb{R}^k$ dopisując zera.
Co więcej, jeśli X jest taką zmienną, że jej niezależne kopie X_1, X_2 tworzą rozkład niezmienniczy na $\mathbb{R}^2$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ niezależne kopie $X_1, ..., X_n$ tworzą rozkład niezmienniczy na $\mathbb{R}^n$.
Wynika to z charakteryzacji przez postać funkcji charakterystycznej i indukcji. Zakładając prawdziwość dla n, mamy dla $n+1$, stosując niezależność i założenie indukcyjne (dwa razy)

$$\varphi_{(X_1,...,X_{n+1})}(t, t_{n+1}) = \varphi_{(X_1,...,X_n)}(t)\varphi_{X_{n+1}}(t_{n+1}) =$$

$$= \varphi_{X_1}(\|t\|)\varphi_{X_{n+1}}(t_{n+1}) = \varphi_{(X_1,X_{n+1})}(\|t\|, t_{n+1}) = \varphi_{X_1}(\|(t, t_{n+1})\|$$

Twierdzenie (Maxwell)

Jeśli X jest rotacyjnie niezmiennicza na $\mathbb{R}^n$ (dla $n \geq 2$) oraz X ma niezależne współrzędne, to X jest zmienną gaussowską.

Twierdzenie (Maxwell)

Jeśli X jest rotacyjnie niezmiennicza na $\mathbb{R}^n$ (dla $n \geq 2$) oraz X ma niezależne współrzędne, to X jest zmienną gaussowską.

Uwaga

Dowód wystarczy przeprowadzić dla $n = 2$. Mając dowolną zmienną X rotacyjnie niezmienniczą w $\mathbb{R}^n$, wiemy, że jej pod-wektor Y długości 2 jest również rotacyjnie niezmienniczy. Jeśli pokażemy gaussowskość Y, to z racji, że wszystkie współrzędne wektora X mają ten sam rozkład, a co więcej rozkład jest produktowy, tak X również będzie gaussowski.

Lemat

Jeśli (X, Y) *jest rotacyjnie niezmienniczy na* $\mathbb{R}^2$, *oraz* X, Y *niezależne, to* $\mathbb{P}(X = 0) \in \{0, 1\}$

Lemat

Jeśli (X, Y) jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^2$, oraz X, Y niezależne, to $\mathbb{P}(X = 0) \in \{0, 1\}$

Dowód(Lemat): Zakładamy niewprost $\mathbb{P}(X = 0) \in (0, 1)$. Dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ mamy równości rozkładów
$X \sim X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$

Lemat

Jeśli (X, Y) jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^2$, oraz X, Y niezależne, to $\mathbb{P}(X = 0) \in \{0, 1\}$

Dowód(Lemat): Zakładamy niewprost $\mathbb{P}(X = 0) \in (0, 1)$. Dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ mamy równości rozkładów
$X \sim X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$
Otrzymujemy stąd

$$\mathbb{P}(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = 0, (X, Y) \neq (0, 0)) =$$

$$= \mathbb{P}(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = 0) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) =$$
$$= \mathbb{P}(X = 0) - (\mathbb{P}(X = 0))^2 > 0$$

Lemat

Jeśli (X, Y) jest rotacyjnie niezmienniczy na $\mathbb{R}^2$, oraz X, Y niezależne, to $\mathbb{P}(X = 0) \in \{0, 1\}$

Dowód(Lemat): Zakładamy niewprost $\mathbb{P}(X = 0) \in (0, 1)$. Dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ mamy równości rozkładów
$X \sim X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$
Otrzymujemy stąd

$$\mathbb{P}(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = 0, (X, Y) \neq (0, 0)) =$$

$$= \mathbb{P}(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) = 0) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) =$$

$$= \mathbb{P}(X = 0) - (\mathbb{P}(X = 0))^2 > 0$$

Zbiory $\{(x, y) \neq (0, 0) : x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = 0\}_{\theta \in (0,1)}$ są parami rozłączne, a to sprzeczność, bo znaleźliśmy nieprzeliczalnie wiele rozłącznych zbiorów o dodatniej mierze $\mathbb{P}$. $\square$

Dowód(Tw. Maxwella): B.S.O $n = 2$. Jeśli $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, to teza jest spełniona. Załóżmy więc, że $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Wektor (X_1, X_2) jest rotacyjnie niezmienniczy, skąd mamy zmienne $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ i.i.d dla których $V_n = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Weźmy też niezależne zmienne $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ o rozkładach $\mathcal{N}(0, 1)$ i połóżmy $Z_n = (Y_1, ..., Y_n)$.

Dowód(Tw. Maxwella): B.S.O $n = 2$. Jeśli $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, to teza jest spełniona. Załóżmy więc, że $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Wektor (X_1, X_2) jest rotacyjnie niezmienniczy, skąd mamy zmienne $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ i.i.d dla których $V_n = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Weźmy też niezależne zmienne $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ o rozkładach $\mathcal{N}(0, 1)$ i połóżmy $Z_n = (Y_1, ..., Y_n)$.
Z rotacyjnej niezmienniczości, dla dowolnej $G \in O(n)$ mamy $\frac{V_n}{\|V_n\|} \sim \frac{GV_n}{\|GV_n\|} \sim G(\frac{V_n}{\|V_n\|})$, czyli $\frac{V_n}{\|V_n\|}$ (jak i $\frac{Z_n}{\|Z_n\|}$) jest rotacyjnie niezmiennicze na $\mathbb{S}^{n-1}$, czyli o rozkładzie jednostajnym μ (Wykorzystujemy, że $p.n$ norma jest różna od 0, dzięki czemu możemy dzielić). W szczególności $\frac{\sqrt{n}X_1}{\|V_n\|} \sim \frac{\sqrt{n}Y_1}{\|Z_n\|}$ (bierzemy pierwsze współrzędne i przemnażamy przez $\sqrt{n}$).

Dowód(Tw. Maxwella): B.S.O $n = 2$. Jeśli $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, to teza jest spełniona. Załóżmy więc, że $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Wektor (X_1, X_2) jest rotacyjnie niezmienniczy, skąd mamy zmienne $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ i.i.d dla których $V_n = (X_1, ..., X_n)$ jest rotacyjnie niezmienniczy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Weźmy też niezależne zmienne $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ o rozkładach $\mathcal{N}(0,1)$ i połóżmy $Z_n = (Y_1, ..., Y_n)$.
Z rotacyjnej niezmienniczości, dla dowolnej $G \in O(n)$ mamy $\frac{V_n}{\|V_n\|} \sim \frac{GV_n}{\|GV_n\|} \sim G(\frac{V_n}{\|V_n\|})$, czyli $\frac{V_n}{\|V_n\|}$ (jak i $\frac{Z_n}{\|Z_n\|}$) jest rotacyjnie niezmiennicze na $\mathbb{S}^{n-1}$, czyli o rozkładzie jednostajnym μ (Wykorzystujemy, że $p.n$ norma jest różna od 0, dzięki czemu możemy dzielić). W szczególności $\frac{\sqrt{n}X_1}{\|V_n\|} \sim \frac{\sqrt{n}Y_1}{\|Z_n\|}$ (bierzemy pierwsze współrzędne i przemnażamy przez $\sqrt{n}$).
Na mocy MPWL, prawa strona zbiega do Y_1 p.n, więc musi być $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ (bo inaczej lewa strona na mocy MPWL zbiega do 0 p.n). Jednak mamy też (założenie $\mathbb{P}(X = 0) = 0$), że $\mathbb{E}[X_1^2] > 0$, skąd $aX_1 \sim Y_1$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}^*$

Dowód(2): BSO $n = 2$. Jeśli X nie ma gęstości względem miary Lebesgue'a, to biorąc niezależną zmienną $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \operatorname{Id}_2)$, zmienna $X + Y$ będzie miała gęstość (gładką i nieznikającą na $\mathbb{R}^n$). Jeśli pokażemy prawdziwość Tw. Maxwella dla takiej zmiennej, to z prostego faktu (X, Y niezależne, $Y, Y + X$ normalne, to X normalna) wynika też teza w przypadku ogólnym. Zakładamy więc, że X ma gładką dodatnią wszędzie gęstość g (będąca produktem (kartezjańskim) gęstości h).

Dowód(2): BSO $n = 2$. Jeśli X nie ma gęstości względem miary Lebesgue'a, to biorąc niezależną zmienną $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \operatorname{Id}_2)$, zmienna $X + Y$ będzie miała gęstość (gładką i nieznikającą na $\mathbb{R}^n$). Jeśli pokażemy prawdziwość Tw. Maxwella dla takiej zmiennej, to z prostego faktu (X, Y niezależne, $Y, Y + X$ normalne, to X normalna) wynika też teza w przypadku ogólnym. Zakładamy więc, że X ma gładką dodatnią wszędzie gęstość g (będąca produktem (kartezjańskim) gęstości h).

Z drugiej strony, skoro X jest niezmiennicza, to dla $x \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $g(x) = g(\|x\|e_1) =: \eta(\|x\|^2)$, więc $\ln(g(x)) = f(\|x\|^2)$ dla pewnej gładkiej $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (całkując przez podstawienie, mamy dla dowolnej rotacji G, dowolnego A mierzalnego, równość

$$0 = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in G^T A) = \int_A g(x) - g(Gx) d\lambda_2(x)$$

skąd $g(x) = g(Rx)$ p.w, z której już wynika powyższe

$(\ln \circ g)(x_1, x_2) = (\ln \circ h)(x_1) + (\ln \circ h)(x_2)$
$(\ln \circ g)(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$
Różniczkując funkcję $\ln \circ g$ po każdej zmiennej z osobna, oraz oznaczając $L = \ln \circ h$, dostajemy

$$\frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial x_k}(x) = L'(x_k), \quad \frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial x_k}(x) = 2x_k f'(x_1^2 + x_2^2)$$

$(\ln \circ g)(x_1, x_2) = (\ln \circ h)(x_1) + (\ln \circ h)(x_2)$
$(\ln \circ g)(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$
Różniczkując funkcję $\ln \circ g$ po każdej zmiennej z osobna, oraz oznaczając $L = \ln \circ h$, dostajemy

$$\frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial x_k}(x) = L'(x_k), \quad \frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial x_k}(x) = 2x_k f'(x_1^2 + x_2^2)$$

Oznacza to, że dla $k \in \{1, 2\}$ mamy równość $L'(x_k) = 2x_k f'(\|x\|^2)$, z której wynika, że f' jest funkcją stałą (ponieważ dla $x_1 > 0$ dostajemy $\frac{L'(x_1)}{2x_1} = f'(x_1^2 + x_2^2)$), czyli $f(\|x\|^2) = a\|x\|^2 + b$, a stąd gęstość zmiennej X wyraża się wzorem $g(x) = \exp(a\|x\|^2 + b)$. Skoro to gęstość, to $a < 0$ (całkowalność) i $e^b = \frac{1}{2\pi|a|}$ (unormowanie). Rozpoznajemy w tym produktową gęstość zmiennej gaussowskiej $\square$

Uwagi

- Miara Haara, zarówno lewostronnie jak i prawostronnie (niekoniecznie obustronnie) niezmiennicza, istnieje na dowolnej lokalnie zwartej grupie

Uwagi

- Miara Haara, zarówno lewostronnie jak i prawostronnie (niekoniecznie obustronnie) niezmiennicza, istnieje na dowolnej lokalnie zwartej grupie
- Mając grupę zwartą lub lokalnie zwartą abelową, miara Haara jest już obustronnie niezmiennicza

Uwagi

- Miara Haara, zarówno lewostronnie jak i prawostronnie (niekoniecznie obustronnie) niezmiennicza, istnieje na dowolnej lokalnie zwartej grupie
- Mając grupę zwartą lub lokalnie zwartą abelową, miara Haara jest już obustronnie niezmiennicza
- Na zwartej przestrzeni metrycznej istnieje lewostronnie niezmiennicza (na działanie izometrii tej przestrzeni) miara probabilistyczna

Uwagi

- Miara Haara, zarówno lewostronnie jak i prawostronnie (niekoniecznie obustronnie) niezmiennicza, istnieje na dowolnej lokalnie zwartej grupie
- Mając grupę zwartą lub lokalnie zwartą abelową, miara Haara jest już obustronnie niezmiennicza
- Na zwartej przestrzeni metrycznej istnieje lewostronnie niezmiennicza (na działanie izometrii tej przestrzeni) miara probabilistyczna
- Dowód jednoznaczności na $\mathbb{S}^{n-1}$ wykorzystywał niezmienniczość na wszystkie izometrie z $O(n)$ (dokładniej - prawie wszystkie względem miary π)

Uwagi

- Miara Haara, zarówno lewostronnie jak i prawostronnie (niekoniecznie obustronnie) niezmiennicza, istnieje na dowolnej lokalnie zwartej grupie
- Mając grupę zwartą lub lokalnie zwartą abelową, miara Haara jest już obustronnie niezmiennicza
- Na zwartej przestrzeni metrycznej istnieje lewostronnie niezmiennicza (na działanie izometrii tej przestrzeni) miara probabilistyczna
- Dowód jednoznaczności na $\mathbb{S}^{n-1}$ wykorzystywał niezmienniczość na wszystkie izometrie z $O(n)$ (dokładniej - prawie wszystkie względem miary π)
- Jak było z dowodem jednoznaczności miary produktowej (na $\mathbb{R}^2$)? Czy na pewno potrzebne nam jest zachowywanie rozkładu przez tak dużo izometrii?

Okazuje się, że aby mieć jednoznaczność miary produktowej na $\mathbb{R}^2$ wystarczy 1(!) obrót.

Okazuje się, że aby mieć jednoznaczność miary produktowej na $\mathbb{R}^2$ wystarczy 1(!) obrót.
Mało tego, nawet nie musimy wiedzieć, że rozkład jest taki sam.
Wystarczy, żeby dalej był produktowy

Okazuje się, że aby mieć jednoznaczność miary produktowej na $\mathbb{R}^2$ wystarczy 1(!) obrót.
Mało tego, nawet nie musimy wiedzieć, że rozkład jest taki sam. Wystarczy, żeby dalej był produktowy

Twierdzenie (Kac-Bernstein)

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi na $\mathbb{R}$. Wówczas, jeśli $X+Y, X-Y$ są niezależne, to X, Y mają rozkłady normalne.

Dowód: Korzystając z niezależności $X+Y, X-Y$ oraz niezależności X, Y dostajemy

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}$$

Dowód: Korzystając z niezależności $X+Y, X-Y$ oraz niezależności X, Y dostajemy

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}$$

Z drugiej zaś strony, przesuwając argumenty, zachodzi

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \mathbb{E}[e^{i(X(s+t)+Y(s-t))}] = \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)$$

Dowód: Korzystając z niezależności $X+Y, X-Y$ oraz niezależności X, Y dostajemy

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}$$

Z drugiej zaś strony, przesuwając argumenty, zachodzi

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \mathbb{E}[e^{i(X(s+t)+Y(s-t))}] = \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)$$

Używając powyższych dla par argumentów (s,t) oraz $(s,-t)$ dostajemy 2 równania:

$$\varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)} \tag{1}$$

$$\varphi_X(s-t)\varphi_Y(s+t) = \varphi_{X+Y}(s)\overline{\varphi_X(t)}\varphi_Y(t) \tag{2}$$

$(1): \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}$
$(2): \varphi_X(s-t)\varphi_Y(s+t) = \varphi_{X+Y}(s)\overline{\varphi_X(t)}\varphi_Y(t)$
Otrzymane równania $(1), (2)$, mnożymy stronami, otrzymując tożsamość dla dowolnych (s, t)

$$\varphi_{X+Y}(s+t)\varphi_{X+Y}(s-t) = (\varphi_{X+Y}(s))^2|\varphi_{X+Y}(t)|^2 \qquad (3)$$

$(1): \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t) = \varphi_{X+Y}(s)\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}$
$(2): \varphi_X(s-t)\varphi_Y(s+t) = \varphi_{X+Y}(s)\overline{\varphi_X(t)}\varphi_Y(t)$
Otrzymane równania $(1),(2)$, mnożymy stronami, otrzymując tożsamość dla dowolnych (s,t)

$$\varphi_{X+Y}(s+t)\varphi_{X+Y}(s-t) = (\varphi_{X+Y}(s))^2|\varphi_{X+Y}(t)|^2 \qquad (3)$$

Przykładając moduł, a następnie logarytm (φ_{X+Y} się nie zeruje) i definiując $f = \ln(|\varphi_{X+Y}|)$ dostajemy równanie funkcyjne, spełnione dla dowolnych argumentów $s, t \in \mathbb{R}$.

$$f(s+t) + f(s-t) = 2(f(s) + f(t)) \qquad (4)$$

Dążymy do tego, by pokazać $f(x) = x^2 f(1)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$(4) : f(s+t) + f(s-t) = 2(f(s) + f(t))$

Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ podstawiając w równanie (4) argumenty $s = nx, t = x$ mamy

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(x) + 2f(nx)$$

$(4) : f(s+t) + f(s-t) = 2(f(s) + f(t))$

Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ podstawiając w równanie (4) argumenty $s = nx, t = x$ mamy

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(x) + 2f(nx)$$

Innymi słowy, kładąc $a_n(x) = f(nx) - f((n-1)x)$ oraz wykorzystując $f(0) = 0$, dostaliśmy równanie

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + 2f(x) = ... = 2nf(x) + a_1(x) = (2n+1)f(x)$$

$(4) : f(s+t) + f(s-t) = 2(f(s) + f(t))$

Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ podstawiając w równanie (4) argumenty $s = nx, t = x$ mamy

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(x) + 2f(nx)$$

Innymi słowy, kładąc $a_n(x) = f(nx) - f((n-1)x)$ oraz wykorzystując $f(0) = 0$, dostaliśmy równanie

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + 2f(x) = ... = 2nf(x) + a_1(x) = (2n+1)f(x)$$

Oznacza to, że

$$f(nx) = f((n-1)x) + (2n-1)f(x) = ... = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)f(x) = n^2 f(x)$$

$(4) : f(s+t) + f(s-t) = 2(f(s) + f(t))$

Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ podstawiając w równanie (4) argumenty $s = nx, t = x$ mamy

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(x) + 2f(nx)$$

Innymi słowy, kładąc $a_n(x) = f(nx) - f((n-1)x)$ oraz wykorzystując $f(0) = 0$, dostaliśmy równanie

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + 2f(x) = ... = 2nf(x) + a_1(x) = (2n+1)f(x)$$

Oznacza to, że

$$f(nx) = f((n-1)x) + (2n-1)f(x) = ... = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)f(x) = n^2 f(x)$$

Powyższe zachodzi również dla $k \in \mathbb{Z}$ (biorąc $s = 0$), a następnie $f(\frac{p}{q}) = p^2 f(\frac{1}{q}) = \frac{p^2}{q^2} q^2 f(\frac{1}{q}) = \frac{p^2}{q^2} f(1)$, więc z ciągłości dostajemy $f(x) = x^2 f(1)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

Wracając do $\varphi_{X+Y}(t)$, dostajemy (podstawiając $c := f(1)$)

$$|\varphi_{X+Y}(t)| = e^{t^2 c}$$

Oznacza to, że istnieje $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła spełniająca $h(0) = 0$, taka że $\varphi_{X+Y}(t) = e^{t^2 c} e^{ih(t)}$.

Wracając do $\varphi_{X+Y}(t)$, dostajemy (podstawiając $c := f(1)$)

$$|\varphi_{X+Y}(t)| = e^{t^2 c}$$

Oznacza to, że istnieje $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła spełniająca $h(0) = 0$, taka że $\varphi_{X+Y}(t) = e^{t^2 c} e^{ih(t)}$.
Przypomnijmy równanie (3)

$$\varphi_{X+Y}(s+t)\varphi_{X+Y}(s-t) = (\varphi_{X+Y}(s))^2 |\varphi_{X+Y}(t)|^2$$

Upraszcza się ono do:

$$e^{ih(s+t)} e^{ih(s-t)} = e^{2ih(s)}$$

Wracając do $\varphi_{X+Y}(t)$, dostajemy (podstawiając $c := f(1)$)

$$|\varphi_{X+Y}(t)| = e^{t^2 c}$$

Oznacza to, że istnieje $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła spełniająca $h(0) = 0$, taka że $\varphi_{X+Y}(t) = e^{t^2 c} e^{ih(t)}$.
Przypomnijmy równanie (3)

$$\varphi_{X+Y}(s+t)\varphi_{X+Y}(s-t) = (\varphi_{X+Y}(s))^2 |\varphi_{X+Y}(t)|^2$$

Upraszcza się ono do:

$$e^{ih(s+t)} e^{ih(s-t)} = e^{2ih(s)}$$

Ustalając $x \in \mathbb{R}$, po podstawieniu $s = x, t = x$ w wspomnianej równości, otrzymujemy

$$e^{ih(2x)} = e^{i2h(x)}$$

Postępując indukcyjnie, mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$e^{ih(nx)} = e^{inh(x)}$$

$\varphi_{X-Y}(t)\varphi_X(s)\varphi_Y(s) = \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)$

Ponownie, standardowe metody + ciągłośc tego przekształcenia dają nam dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ równość $e^{ih(x)} = e^{ixh(1)}$. Skąd $\varphi_{X+Y}(t) = e^{ith(1)}e^{t^2 c}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu normalnego (ponieważ $c = f(1) = \ln|\varphi_{X+Y}(1)| \leq \ln(1) = 0$).

$\varphi_{X-Y}(t)\varphi_X(s)\varphi_Y(s) = \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)$

Ponownie, standardowe metody + ciągłośc tego przekształcenia dają nam dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ równość $e^{ih(x)} = e^{ixh(1)}$. Skąd $\varphi_{X+Y}(t) = e^{ith(1)}e^{t^2c}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu normalnego (ponieważ $c = f(1) = \ln|\varphi_{X+Y}(1)| \leq \ln(1) = 0$). Pozostaje zauważyć, że jakbyśmy zamiast rozważania tego pierwszego równania dla par $(s,t),(s,-t)$, rozważyli je dla par $(s,t),(-s,t)$ dostalibyśmy analogiczne równanie funkcyjne na funkcję φ_{X-Y} tym samym dowodząc, że również $X-Y$ jest gaussowskie.

$\varphi_{X-Y}(t)\varphi_X(s)\varphi_Y(s) = \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)$

Ponownie, standardowe metody + ciągłośc tego przekształcenia dają nam dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ równość $e^{ih(x)} = e^{ixh(1)}$. Skąd $\varphi_{X+Y}(t) = e^{ith(1)}e^{t^2c}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu normalnego (ponieważ $c = f(1) = \ln|\varphi_{X+Y}(1)| \leq \ln(1) = 0$).
Pozostaje zauważyć, że jakbyśmy zamiast rozważania tego pierwszego równania dla par $(s,t),(s,-t)$, rozważyli je dla par $(s,t),(-s,t)$ dostalibyśmy analogiczne równanie funkcyjne na funkcję φ_{X-Y} tym samym dowodząc, że również $X-Y$ jest gaussowskie.
To już zakończy dowód, ponieważ na mocy niezależności mamy wtedy też gaussowskość zmiennych

$$2X = (X+Y)+(X-Y) \qquad 2Y = (X+Y)-(X-Y)$$

□

Kolejne Uwagi

- Twierdzenie Kaca-Bernsteina zachodzi na dowolnej liniowo-topologicznej przestrzeni (pod warunkiem, że mamy odpowiednie mierzalności i wiemy co to znaczy gaussowskość)

Kolejne Uwagi

- Twierdzenie Kaca-Bernsteina zachodzi na dowolnej liniowo-topologicznej przestrzeni (pod warunkiem, że mamy odpowiednie mierzalności i wiemy co to znaczy gaussowskość)
- Samo sformułowanie Twierdzenia nie korzysta nigdzie z struktury topologicznej, może więc być podstawą do definicji zmiennej gaussowskiej np. na grupie

Kolejne Uwagi

- Twierdzenie Kaca-Bernsteina zachodzi na dowolnej liniowo-topologicznej przestrzeni (pod warunkiem, że mamy odpowiednie mierzalności i wiemy co to znaczy gaussowskość)
- Samo sformułowanie Twierdzenia nie korzysta nigdzie z struktury topologicznej, może więc być podstawą do definicji zmiennej gaussowskiej np. na grupie
- Twierdzenie to można uogólnić na dwie (nietrywialne) kombinacje liniowe n niezależnych zmiennych (Darmois - Skitovich). Dowód podobny, tylko bardziej techniczny i subtelny.