Równania funkcyjne

Mieszko Zimny

Koło Pasjonatów Matematyki UW

June 12, 2021

Równanie funkcyjne to równanie, w którym niewiadomą jest funkcja, to znaczy zadanie, w którym szukamy funkcji spełniających zadane równości.

Równanie funkcyjne to równanie, w którym niewiadomą jest funkcja, to znaczy zadanie, w którym szukamy funkcji spełniających zadane równości.

Przykłady

- Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

  dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ (równanie Cauchy'ego).
- Znajdź wszystkie funkcje $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ spełniające równość

$$f(f(x)+y) = xf(1+xy)$$

  dla wszystkich $x, y \in (0, \infty)$.
- Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$f(f(x)) = x^2 - 2$$

  dla każdej liczby rzeczywistej x?

Metody rozwiązywania równań funkcyjnych:

Metody rozwiązywania równań funkcyjnych:

- Podstawianie wartości pod zmienne: często podstawiając w zadanym równaniu konkretne stałe (np. $x = 0$, $x = 1$) lub wyrażenia (np. $y = -x$) dostajemy istotnie prostszą równość, która pozwala nam odkryć pewnej własności szukanych funkcji.

Metody rozwiązywania równań funkcyjnych:

- Podstawianie wartości pod zmienne: często podstawiając w zadanym równaniu konkretne stałe (np. $x = 0$, $x = 1$) lub wyrażenia (np. $y = -x$) dostajemy istotnie prostszą równość, która pozwala nam odkryć pewnej własności szukanych funkcji.
- Indukcja: jeżeli szukamy funkcji określonych na zbiorze liczb naturalych, całkowitych lub wymiernych, to czasami można wykorzystać wartość $f(1)$, aby znaleźć $f(n)$ dla dowolnej $n \in \mathbb{Z}$, a potem $f\left(\frac{m}{n}\right)$.

Metody rozwiązywania równań funkcyjnych:

- Podstawianie wartości pod zmienne: często podstawiając w zadanym równaniu konkretne stałe (np. $x = 0$, $x = 1$) lub wyrażenia (np. $y = -x$) dostajemy istotnie prostszą równość, która pozwala nam odkryć pewnej własności szukanych funkcji.
- Indukcja: jeżeli szukamy funkcji określonych na zbiorze liczb naturalych, całkowitych lub wymiernych, to czasami można wykorzystać wartość $f(1)$, aby znaleźć $f(n)$ dla dowolnej $n \in \mathbb{Z}$, a potem $f\left(\frac{m}{n}\right)$.
- Użycie iniektywnośći lub suriektywności funkcji pojawiających się w równaniach.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Podstawiając $x = y = 0$, dostajemy

$$f(0)^2 = 2f(0)^2.$$

Stąd $f(0)^2 = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Podstawiając $x = y = 0$, dostajemy

$$f(0)^2 = 2f(0)^2.$$

Stąd $f(0)^2 = 0$, czyli $f(0) = 0$.
Podstawmy teraz $y = -x$. Dostajemy

$$0 = f(0)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2.$$

Suma dwóch kwadratów może być równa zero tylko wtedy, gdy oba są równe zero, stąd $f(x) = 0$. Ponieważ x było dowolne, mamy stąd $f \equiv 0$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że każda funkcja postaci $f(x) = cx$ dla $c \in \mathbb{Q}$ spełnia dane równanie. Udowodnimy, że są to wszystkie takie funkcje.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że każda funkcja postaci $f(x) = cx$ dla $c \in \mathbb{Q}$ spełnia dane równanie. Udowodnimy, że są to wszystkie takie funkcje. Podstawiając $x = y = 0$ dostajemy

$$f(0) = 2f(0),$$

czyli $f(0) = 0$. Podstawiamy teraz $y = 1$. Mamy

$$f(x+1) = f(x) + f(1).$$

Udowodnimy przez indukcję, że $f(n) = f(1)n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dla $n = 0$ jest to prawda. Załóżmy teraz, że mamy tezę dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla $n+1$ mamy

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(1)n + f(1) = f(1)(n+1).$$

Kończy to dowód indukcyjny. Podobnie można pokazać, że $f(-n) = f(1)(-n)$.

Dla $n = 0$ jest to prawda. Załóżmy teraz, że mamy tezę dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla $n + 1$ mamy

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(1)n + f(1) = f(1)(n+1).$$

Kończy to dowód indukcyjny. Podobnie można pokazać, że $f(-n) = f(1)(-n)$.
Przez indukcję można udowodnić także, że dla dowolnego $n \geq 2$ i dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x_1 + \cdots x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n).$$

Istotnie, dla $n = 2$ jest to założenie naszego zadania. Teraz załóżmy, że powyższa równość zachodzi dla pewego n. Wówczas dla $n + 1$ mamy

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f((x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n) =$$

$$= f(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + f(x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n).$$

Kończy to dowód indukcyjny.

Stąd dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$ mamy

$$mf(1) = f(m) = f\left(\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right) =$$

$$= f\left(\frac{m}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right),$$

a stąd

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1).$$

Otrzymaliśmy funkcję postaci $f(x) = cx$, a zatem istotnie są to jedyne rozwiązania.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Rozwiązanie:
Podstawmy $x = 0$. Dostajemy

$$f(y) = f(f(0)) + y + 1.$$

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Rozwiązanie:
Podstawmy $x = 0$. Dostajemy

$$f(y) = f(f(0)) + y + 1.$$

Zatem f jest postaci $f(x) = x + c$ dla pewnej stałej c. Wstawiając to do wyjściowego równania, dostajemy

$$x + y + c = x + 2c + y + 1,$$

$$c = -1.$$

Dostajemy funkcję $f(x) = x - 1$.

Zadanie

Zmajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie

Zmajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $x = y = 0$ dostajemy

$$f(0) = 2f(0),$$

czyli $f(0) = 0$.

Zadanie

Zmajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $x = y = 0$ dostajemy

$$f(0) = 2f(0),$$

czyli $f(0) = 0$. Podstawiając teraz $x = y$, dostajemy

$$f(0) = 2f(x)^2 - 2x^2,$$

$$f(x) = x^2.$$

Pozostaje jedynie sprawdzić, czy funkcja ta spełnia wyjściowe równanie

$$f(x-y) = (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = f(x) + f(y) - 2xy.$$

Zatem $f(x) = x^2$ jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Udowonimy, że jeżeli f jest rozwiązaniem zadanego równania, to musi być różnowartościowa. Załóżmy, że $f(a) = f(b)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ mamy

$$2a + f(y) = f(2f(a) + f(y)) = f(2f(b) + f(y)) = 2b + f(y),$$

stąd $a = b$, a zatem f istotnie jest różnowartościowa.

Podstawmy teraz $x = 0$. Dostajemy

$$f(2f(0) + f(y)) = f(y).$$

Z różnowartościowości f mamy

$$2f(0) + f(y) = y,$$

a więc $f(x) = x + c$ dla pewnej stałej c. Po podstawieniu tej równości do wyjściowego równania, dostajemy

$$f(2(x + c) + y + c) = 2x + y + c,$$

$$2x + y + 4c = 2x + y + c,$$

$$c = 0.$$

Zatem jedynym rozwiązaniem jest $f(x) = x$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) + 1 = f(x) + f(y) + xy.$$

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) + 1 = f(x) + f(y) + xy.$$

Rozwiązanie:
Podstawmy $y = x$. Dostajemy

$$f(x)^2 + 1 = 2f(x) + x^2,$$

$$(f(x) - 1)^2 = x^2.$$

Stąd $f(x) - 1 = x$ lub $f(x) - 1 = -x$, czyli dla każdego x mamy $f(x) = x + 1$ lub $f(x) = -x + 1$.

Sprawdzimy, że funkcje $f(x) = x + 1$ oraz $f(x) = -x + 1$ spełniają wyjściowe równanie.
Dla $f(x) = x + 1$ mamy

$$f(x)f(y) + 1 = (x + 1)(y + 1) + 1 = xy + x + y + 2,$$

$$f(x) + f(y) + xy = x + 1 + y + 1 + xy = xy + x + y + 2,$$

a dla $f(x) = -x + 1$

$$f(x)f(y) + 1 = (-x + 1)(-y + 1) + 1 = xy - x - y + 2,$$

$$f(x) + f(y) + xy = -x + 1 - y + 1 + xy = xy - x - y + 2.$$

W obu przypadkach otrzymujemy równość, a więc obie otrzymane funkcje są rozwiązaniami.

Udowodnimy teraz, że nie ma innych rozwiązań.

Udowodnimy teraz, że nie ma innych rozwiązań. Niech f będzie jakimś rozwiązaniem wyjściowego równania innym od dwóch powyższych. Wówczas istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(a) = a + 1$ i $f(b) = -b + 1$. Jednocześnie musi być

$$f(a)f(b) + 1 = f(a) + f(b) + ab,$$

czyli

$$(a + 1)(-b + 1) + 1 = a + 1 - b + 1 + ab,$$

$$-ab + a - b + 2 = ab + a - b + 2,$$

$$ab = 0.$$

Stąd $a = 0$ lub $b = 0$.

Udowodnimy teraz, że nie ma innych rozwiązań. Niech f będzie jakimś rozwiązaniem wyjściowego równania innym od dwóch powyższych. Wówczas istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(a) = a + 1$ i $f(b) = -b + 1$. Jednocześnie musi być

$$f(a)f(b) + 1 = f(a) + f(b) + ab,$$

czyli

$$(a+1)(-b+1) + 1 = a + 1 - b + 1 + ab,$$

$$-ab + a - b + 2 = ab + a - b + 2,$$

$$ab = 0.$$

Stąd $a = 0$ lub $b = 0$.
W takim razie, jeżeli $f(a) = a + 1$ dla pewnego $a \neq 0$, to musi być $f(x) = x + 1$ dla wszystkich $x \neq 0$. Wartość $f(0)$ i tak wynosi zawsze 1, więc wówczas $f(x) = x + 1$. Analogicznie rozumujemy, gdy $f(a) = -a + 1$ dla pewnego $a \neq 0$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające następujące warunki:

- f(1) = 2,
- $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające następujące warunki:

- f(1) = 2,
- $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $y = 1$ dostajemy

$$f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1,$$

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

Zadanie

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające następujące warunki:

- f(1) = 2,
- $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $y = 1$ dostajemy

$$f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1,$$

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

Teraz, podobnie jak w jednym z poprzednich zadań, można udowodnić przez indukcję, że $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz

$$f(r+n) = f(r) + n$$

dla dowolnego $r \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ mamy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (m+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1.$$

Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ mamy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (m+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1.$$

Dla $m = n$ dostajemy

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1,$$

czyli

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1.$$

Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ mamy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (m+1) f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1,$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1.$$

Dla $m = n$ dostajemy

$$f(1) = n f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1,$$

czyli

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1.$$

Podstawiając teraz tę wartość to ogólniejszej równości, dostajemy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m\left(\frac{1}{n} + 1\right) - m + 1 = \frac{m}{n} + 1.$$

Otrzymaliśmy więc funkcję $f(x) = x + 1$ i pozostaje sprawdzić, czy spełnia ona warunki zadania. Oczywiście $f(1) = 2$ oraz

$$f(xy) = xy + 1,$$

$$f(x)f(y) - f(x+y) + 1 = (x+1)(y+1) - (x+y+1) + 1 = xy + 1.$$

Zatem otrzymana funkcja jest jedynym rozwiązaniem równania.

Zadanie

Wyznacz wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

Zadanie

Wyznacz wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2-y^2).$$

Rozwiązanie:
Wprowadźmy nowe zmienne: $u = x+y$, $v = x-y$. Wyjściowe równanie przybiera wówczas postać

$$vf(u) - uf(v) = uv(u^2-v^2).$$

Dla każdej pary liczb rzeczywistych (u, v) istnieje para (x, y) taka, że $u = x+y$ i $v = x-y$. Zatem jeżeli f spełnia powyższe równanie dla dowolnych wartości (u, v), to spełnia też równanie z zadania dla (x, y).

Niech teraz u, v będą dowolnymi, różnymi od zera liczbami rzeczywistymi. Dzieląc otrzymaną równość stronami przez uv, dostajemy

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2,$$
$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

Niech teraz u, v będą dowolnymi, różnymi od zera liczbami rzeczywistymi. Dzieląc otrzymaną równość stronami przez uv, dostajemy

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2,$$
$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

Innymi słowy, funkcja

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2$$

określona na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest stała. Oznaczmy jej wartość przez c. Wówczas mamy

$$f(x) = x^3 + cx$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Niech teraz u, v będą dowolnymi, różnymi od zera liczbami rzeczywistymi. Dzieląc otrzymaną równość stronami przez uv, dostajemy

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2,$$

$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

Innymi słowy, funkcja

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2$$

określona na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest stała. Oznaczmy jej wartość przez c. Wówczas mamy

$$f(x) = x^3 + cx$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Podstawiając w równaniu z zadania $x = y$ dostajemy

$$-2xf(0) = 0$$

dla dowolnego x, czyli $f(0) = 0$.

Stąd równość

$$f(x) = x^3 + cx$$

jest prawdziwa także dla $x = 0$. Pozostaje sprawdzić przez podstawienie, dla jakich wartośći c równanie z zadania jest spełnione. Mamy

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) =$$

$$= (x-y)((x+y)^3 + c(x-y)) - (x+y)((x-y)^3 + c(x-y)) =$$

$$= (x+y)^3(x-y) - (x+y)(x-y)^3 = (x^2-y^2)((x+y)^2 - (x-y)^2) =$$

$$= 4xy(x^2 - y^2).$$

Równanie jest spełnione niezależnie od wartości c. Wszystkimi rozwiązaniami równanie są więc funkcje postaci $f(x) = x^3 + cx$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.

Zadanie

Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych o wartościach w zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych, że równość

$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych w, x, y, z spełniających warunek $wx = yz$.

Zadanie

Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych o wartościach w zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych, że równość

$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych w, x, y, z spełniających warunek $wx = yz$.

Rozwiązanie:

Podstawiając $x = y = z = w = 1$, dostajemy

$$f(1)^2 = f(1),$$

czyli, biorąc pod uwagę, że $f(1) > 0$, mamy $f(1) = 1$.

Niech teraz t będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Podstawmy $w = 1$, $x = t$, $y = z = \sqrt{t}$. Wówczas dostajemy

$$\frac{f(t)^2 + f(1)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t},$$

$$\frac{1 + f(t)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t}.$$

Niech teraz t będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Podstawmy $w = 1$, $x = t$, $y = z = \sqrt{t}$. Wówczas dostajemy

$$\frac{f(t)^2 + f(1)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t},$$

$$\frac{1 + f(t)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t}.$$

Przekształcając tę równość równoważnie, dostajemy

$$t(1 + f(t)^2) = f(t)(1 + t^2),$$

$$t + tf(t)^2 = f(t) + t^2 f(t),$$

$$t - f(t) = t^2 f(t) - tf(t)^2,$$

$$0 = (t - f(t))(1 - tf(t)).$$

Stąd dla każdego t mamy

$$f(t) = t \quad \text{lub} \quad f(t) = \frac{1}{t}.$$

Niech teraz t będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Podstawmy $w = 1$, $x = t$, $y = z = \sqrt{t}$. Wówczas dostajemy

$$\frac{f(t)^2 + f(1)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t},$$

$$\frac{1 + f(t)^2}{2f(t)} = \frac{1 + t^2}{2t}.$$

Przekształcając tę równość równoważnie, dostajemy

$$t(1 + f(t)^2) = f(t)(1 + t^2),$$

$$t + tf(t)^2 = f(t) + t^2 f(t),$$

$$t - f(t) = t^2 f(t) - tf(t)^2,$$

$$0 = (t - f(t))(1 - tf(t)).$$

Stąd dla każdego t mamy

$$f(t) = t \quad \text{lub} \quad f(t) = \frac{1}{t}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$ spełniają zadany warunek. Udowodnimy, że są to jedyne takie funkcje.

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$ spełniają zadany warunek. Udowodnimy, że są to jedyne takie funkcje.

Przypuśćmy, że istnieje inna funkcja f spełniająca zadaną równość. Istnieją wówczas takie a i b, że $f(a) \neq a$ oraz $f(b) \neq \frac{1}{b}$. Wówczas musi być

$$f(a) = \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad f(b) = b.$$

Podstawiając $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$, dostajemy

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$ spełniają zadany warunek. Udowodnimy, że są to jedyne takie funkcje.

Przypuśćmy, że istnieje inna funkcja f spełniająca zadaną równość. Istnieją wówczas takie a i b, że $f(a) \neq a$ oraz $f(b) \neq \frac{1}{b}$. Wówczas musi być

$$f(a) = \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad f(b) = b.$$

Podstawiając $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$, dostajemy

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}.$$

Wiemy, że $f(ab) = ab$ lub $f(ab) = \frac{1}{ab}$. W pierwszym przypadku dostajemy

$$\frac{1}{a^2} + b^2 = a^2 + b^2,$$

czyli $a = 1$. Wiemy już, że $f(1) = 1$, ale założyliśmy, że $f(a) \neq a$. Otrzymujemy więc sprzeczność.

W drugim przypadku otrzymujemy

$$\frac{1}{a^2} + b^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

a więc tym razem $b = 1$ i znowu mamy sprzecznośc z warunkiem $f(1) = 1$.
Uzyskane w obu przypadkach sprzeczności kończą rozwiązanie: jedynymi funkcjami spełniającymi dane równanie są $f(x) = x$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$.