Geometria rzutowa – dwustosunek i rzut środkowy

Radosław Opoka

Koło Pasjonatów Matematyki UW

5 czerwca 2021

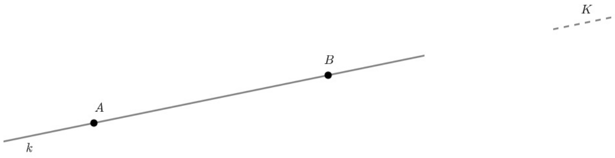
Płaszczyzna rzutowa powstaje przez dodanie do każdej prostej dokładnie jednego punktu – kierunku prostej. Punkt taki nazywamy punktem niewłaściwym.

Płaszczyzna rzutowa powstaje przez dodanie do każdej prostej dokładnie jednego punktu – kierunku prostej. Punkt taki nazywamy punktem niewłaściwym.

Zakładamy, że wszystkie punkty niewłaściwe leżą na jednej prostej. Będziemy ją nazywać prostą niewłaściwą.

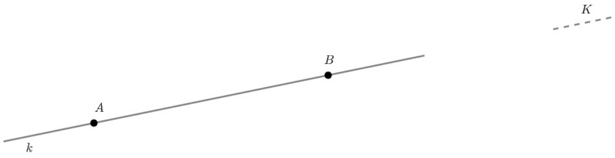
Płaszczyzna rzutowa powstaje przez dodanie do każdej prostej dokładnie jednego punktu – kierunku prostej. Punkt taki nazywamy punktem niewłaściwym.

Zakładamy, że wszystkie punkty niewłaściwe leżą na jednej prostej. Będziemy ją nazywać prostą niewłaściwą.



Płaszczyzna rzutowa powstaje przez dodanie do każdej prostej dokładnie jednego punktu – kierunku prostej. Punkt taki nazywamy punktem niewłaściwym.

Zakładamy, że wszystkie punkty niewłaściwe leżą na jednej prostej. Będziemy ją nazywać prostą niewłaściwą.



Punkty lub proste, które nie są niewłaściwe będziemy nazywali właściwymi.

Obserwacja

Każde dwie różne proste na płaszczyźnie rzutowej przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

Obserwacja

Każde dwie różne proste na płaszczyźnie rzutowej przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

Obserwacja

Przez każde dwa punkty na płaszczyźnie rzutowej przechodzi dokładnie jedna prosta.

Dwustosunek na prostej właściwej

Dana jest prosta właściwa i cztery różne punkty właściwe A, B, C, D leżące na tej prostej. Dwustosunkiem tej czwórki punktów będziemy nazywali wielkość

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DA}}$$

Dwustosunek na prostej właściwej

Dana jest prosta właściwa i cztery różne punkty właściwe A, B, C, D leżące na tej prostej. Dwustosunkiem tej czwórki punktów będziemy nazywali wielkość

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DA}}$$

Własności dwustosunku

- $(ABCD) = (CDAB)$
- $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$
- $(ABCD) + (ACBD) = 1$
- $(ABCX) = (ABCY) \implies X = Y$

Definicje dwustosunku możemy rozszerzyć na przypadek, gdy jeden z rozpatrywanych punktów jest niewłaściwy. Jeśli A, B, C to punkty właściwe leżące na jednej prostej właściwej, a D jest kierunkiem tej prostej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy tak samo jak wcześniej, przy czym przyjmujemy, że $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$.

Definicje dwustosunku możemy rozszerzyć na przypadek, gdy jeden z rozpatrywanych punktów jest niewłaściwy. Jeśli A, B, C to punkty właściwe leżące na jednej prostej właściwej, a D jest kierunkiem tej prostej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy tak samo jak wcześniej, przy czym przyjmujemy, że $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$.

Jeśli z kontekstu wynika o jakiej prostej jest mowa, to często będziemy oznaczać kierunek prostej przez ∞. Należy jednak uważać, gdy mamy do czynienia z wieloma prostymi, bo kierunki dwóch nierównoległych prostych są różnymi punktami.

Definicje dwustosunku możemy rozszerzyć na przypadek, gdy jeden z rozpatrywanych punktów jest niewłaściwy. Jeśli A, B, C to punkty właściwe leżące na jednej prostej właściwej, a D jest kierunkiem tej prostej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy tak samo jak wcześniej, przy czym przyjmujemy, że $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$.

Jeśli z kontekstu wynika o jakiej prostej jest mowa, to często będziemy oznaczać kierunek prostej przez ∞. Należy jednak uważać, gdy mamy do czynienia z wieloma prostymi, bo kierunki dwóch nierównoległych prostych są różnymi punktami.

Opisane wcześniej własności dwustosunku zostają zachowane przy powyższym rozszerzeniu definicji.

Definicja

Niech k i l będą różnymi prostymi. Wybierzmy dowolny punkt S, który nie leży na żadnej z rozważanych prostych (punkt S może być niewłaściwy).
Rzutem środkowym z prostej k w prostą l o środku w punkcie S nazywamy przekształcenie

$$X \longmapsto l \cap SX.$$

Definicja

Niech k i l będą różnymi prostymi. Wybierzmy dowolny punkt S, który nie leży na żadnej z rozważanych prostych (punkt S może być niewłaściwy).
Rzutem środkowym z prostej k w prostą l o środku w punkcie S nazywamy przekształcenie

$$X \longmapsto l \cap SX.$$

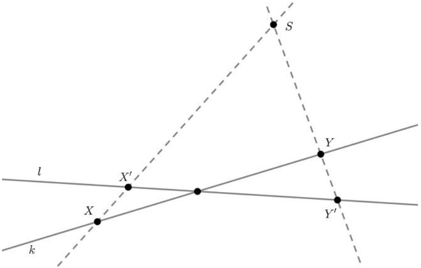
Jako, że każde dwie proste przecinając się w dokładnie jednym punkcie, to przekształcenie to jest dobrze określone.

Definicja

Niech k i l będą różnymi prostymi. Wybierzmy dowolny punkt S, który nie leży na żadnej z rozważanych prostych (punkt S może być niewłaściwy).
Rzutem środkowym z prostej k w prostą l o środku w punkcie S nazywamy przekształcenie

$$X \longmapsto l \cap SX.$$

Jako, że każde dwie proste przecinając się w dokładnie jednym punkcie, to przekształcenie to jest dobrze określone.



Obserwacja

Punkt przecięcia prostych k i l jest punktem stałym każdego rzutu środkowego z prostej k w prostą l.

Obserwacja

Punkt przecięcia prostych k i l jest punktem stałym każdego rzutu środkowego z prostej k w prostą l.

Twierdzenie

Rzut środkowy z prostej właściwej w prostą właściwą zachowuje dwustosunek tzn. jeśli A, B, C, D są różnymi punktami leżącymi na jednej prostej właściwej, a A', B', C', D' ich obrazami przy rzucie środkowym na inną prostą właściwą, to

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Dwustosunek na prostej niewłaściwej

Jeśli A, B, C, D są różnymi punktami leżącymi na prostej niewłaściwej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy w następujący sposób. Niech S będzie dowolnym punktem właściwym, a k dowolną prostą właściwą. Przez A', B', C', D' oznaczmy przecięcia prostej k z prostymi SA, SB, SC, SD. Wtedy ustalamy $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Dwustosunek na prostej niewłaściwej

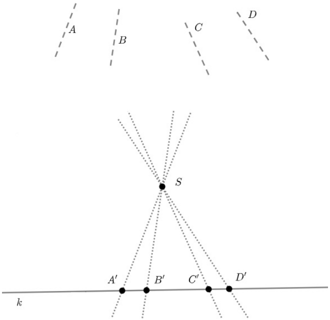
Jeśli A, B, C, D są różnymi punktami leżącymi na prostej niewłaściwej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy w następujący sposób. Niech S będzie dowolnym punktem właściwym, a k dowolną prostą właściwą. Przez A', B', C', D' oznaczmy przecięcia prostej k z prostymi SA, SB, SC, SD. Wtedy ustalamy $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Definicja ta jest poprawna (wartość $(ABCD)$ nie zależy od wyboru S i k) na mocy zachowywania dwustosunku na prostych właściwych przez rzut środkowy. Wskazane własności dwustosunku nadal są prawdziwe.

Dwustosunek na prostej niewłaściwej

Jeśli A, B, C, D są różnymi punktami leżącymi na prostej niewłaściwej, to dwustosunek $(ABCD)$ definiujemy w następujący sposób. Niech S będzie dowolnym punktem właściwym, a k dowolną prostą właściwą. Przez A', B', C', D' oznaczmy przecięcia prostej k z prostymi SA, SB, SC, SD. Wtedy ustalamy $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Definicja ta jest poprawna (wartość $(ABCD)$ nie zależy od wyboru S i k) na mocy zachowywania dwustosunku na prostych właściwych przez rzut środkowy. Wskazane własności dwustosunku nadal są prawdziwe.



Obserwacja

Rzut środkowy zachowuje dwustosunek również przy rzucie z prostej niewłaściwej lub w prostą niewłaściwą.

Obserwacja

Rzut środkowy zachowuje dwustosunek również przy rzucie z prostej niewłaściwej lub w prostą niewłaściwą.

Podsumowanie

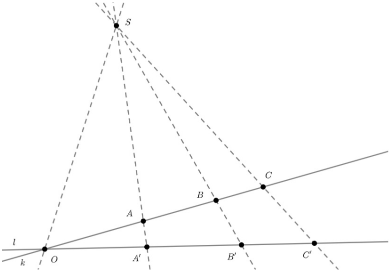
- Dzięki definicji płaszczyzny rzutowej nie musimy martwić się czy pewne proste się przecinają – każde dwie proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.
- Dla każdej czwórki różnych, współliniowych punktów na płaszczyźnie rzutowej zdefiniowaliśmy wielkość zwaną dwustosunkiem.
- Wiemy, że dwustosunek jest zachowywany przy rzutach środkowych.

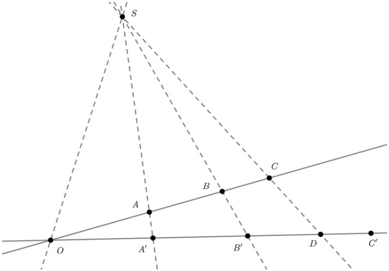
Zadanie

Dane są dwie różne proste k i l (niekoniecznie są to proste właściwe). Punkt O jest punktem wspólnych tych prostych. Na prostej k dane są trzy parami różne punkty A, B, C, różne od O. Na prostej l dane są trzy parami różne punkty A', B', C', różne od O. Pokazać, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $(OABC) = (OA'B'C')$.

Dzięki temu, że rzut środkowy traktuje zwykłą prostą i prostą niewłaściwą w ten sam sposób i, że dwustosunek traktuje zwykłe punkty i punkty niewłaściwe w ten sam sposób nie musimy w tym zadaniu rozpatrywać żadnych przypadków w zależności od tego czy proste k i l są właściwe i nierównoległe, właściwe i równoległe, lub jedna z prostych jest niewłaściwa, a druga właściwa.

Dzięki temu, że rzut środkowy traktuje zwykłą prostą i prostą niewłaściwą w ten sam sposób i, że dwustosunek traktuje zwykłe punkty i punkty niewłaściwe w ten sam sposób nie musimy w tym zadaniu rozpatrywać żadnych przypadków w zależności od tego czy proste k i l są właściwe i nierównoległe, właściwe i równoległe, lub jedna z prostych jest niewłaściwa, a druga właściwa.





Dowód implikacji " $\Longrightarrow$ ":
Oznaczmy punkt przecięcia prostych AA', BB', CC' przez S. Rozpatrzmy rzut środkowy prostej k w prostą l o środku w punkcie S. Obrazem punktu A w tym rzucie jest punkt A', obrazem punktu B jest punkt B', a punktu C punkt C'. Dodatkowo punkt O jest punktem stałym – obrazem punktu O jest on sam. Skoro rzut środkowy zachowuje dwustosunek, to $(OABC) = (OA'B'C')$.

Dowód implikacji " $\Longrightarrow$ ":
Oznaczmy punkt przecięcia prostych AA', BB', CC' przez S. Rozpatrzmy rzut środkowy prostej k w prostą l o środku w punkcie S. Obrazem punktu A w tym rzucie jest punkt A', obrazem punktu B jest punkt B', a punktu C punkt C'. Dodatkowo punkt O jest punktem stałym – obrazem punktu O jest on sam. Skoro rzut środkowy zachowuje dwustosunek, to $(OABC) = (OA'B'C')$.

Dowód implikacji" $\Longleftarrow$ ":
Oznaczmy punkt przecięcia prostych AA' i BB' przez S oraz punkt przecięcia prostej CS z prostą l przez D. Rozpatrzmy rzut środkowy z prostej k w prostą l o śrdoku w punkcie S. Zachodzi

$$A \mapsto A' \qquad B \mapsto B' \qquad C \mapsto D \qquad O \mapsto O.$$

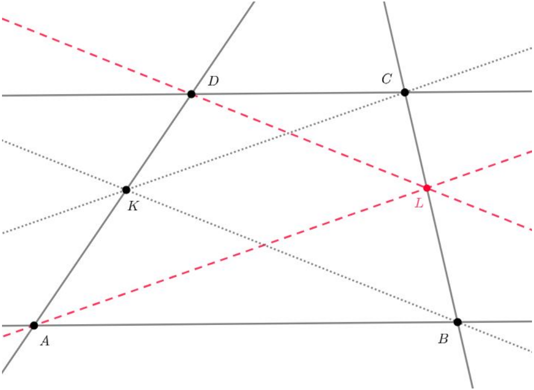
Jako, że rzut środkowy zachowuje dwustosunek, to $(OABC) = (OA'B'D)$. Z założenia wiemy jednak, że $(OABC) = (OA'B'C')$ zatem $(OA'B'D) = (OA'B'C')$, a to znaczy, że $D = C'$. Więc prosta CC' przechodzi przez punkt S.

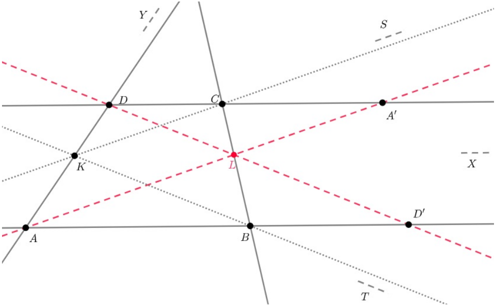
Zadanie

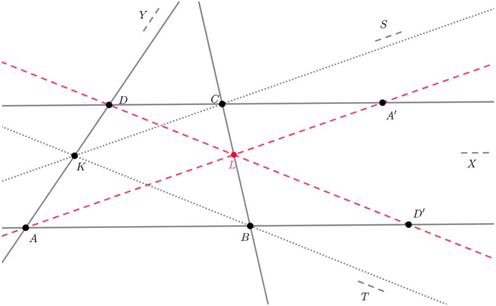
Dany jest trapez $ABCD$. Punkt K leży na boku AD ($K \neq A$, $K \neq D$). Przez k oznaczmy prostą przechodzącą przez A i równoległą do CK, a przez l oznaczmy prostą przechodzącą przez D i równoległą do BK. Niech L będzie punktem wspólnym prostych k i l. Pokazać, że L, leży na prostej BC.

Zadanie

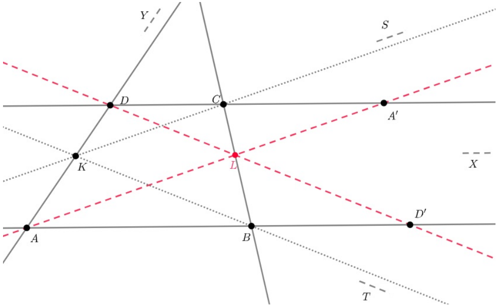
Dany jest trapez $ABCD$. Punkt K leży na boku AD ($K \neq A$, $K \neq D$). Przez k oznaczmy prostą przechodzącą przez A i równoległą do CK, a przez l oznaczmy prostą przechodzącą przez D i równoległą do BK. Niech L będzie punktem wspólnym prostych k i l. Pokazać, że L, leży na prostej BC.



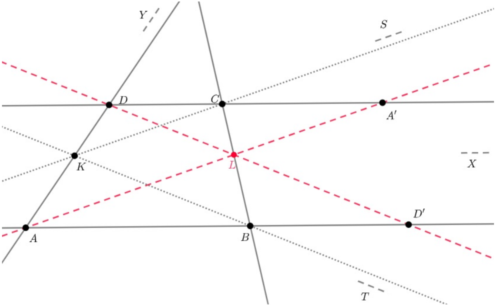

Y
S
D
C
A'
K
L
X
D'
A
B
T



Jako, że proste AB i DC są równoległe, to ich punktem wspólnym jest ich kierunek – oznaczmy ten punkt przez X. Niech A' będzie punktem przecięcia prostych AL i DC, a D' prostych DL i AB. Oba te punkty są właściwe, ponieważ AL nie jest równoległe do DC ($K \neq D$), oraz DL nie jest równoległe do AB ($K \neq A$). Z warunków zadania wynika również, że A' nie pokrywa się ani z C, ani z D, podobnie jak D' jest różny od A i różny od B.

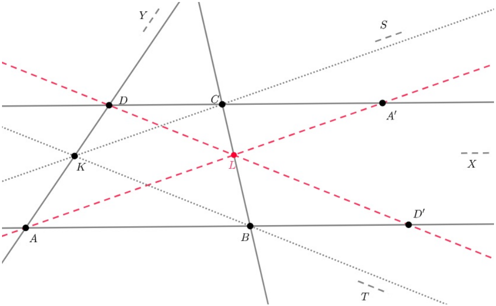


Jeśli pokażemy, że $(XABD') = (XA'CD)$, to zgodnie z poprzednim zadaniem proste AA', BC, DD' będą przecinały się w jednym punkcie. Jednak AA' tnie się z DD' w punkcie L. Równość $(XABD') = (XA'CD)$ będzie więc świadczyła o tym, że prosta BC przechodzi przez punkt L.



Jeśli pokażemy, że $(XABD') = (XA'CD)$, to zgodnie z poprzednim zadaniem proste AA', BC, DD' będą przecinały się w jednym punkcie. Jednak AA' tnie się z DD' w punkcie L. Równość $(XABD') = (XA'CD)$ będzie więc świadczyła o tym, że prosta BC przechodzi przez punkt L.

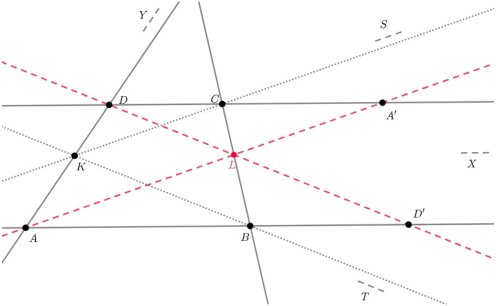
Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenia: S – kierunek CK (a zarazem kierunek AA'), T – kierunek BK (a zarazem kierunek DD'), Y – kierunek AD.



Rozpatrzmy rzut środkowy z prostej AB w prostą AD o środku w punkcie T. Zachodzi

$$A \mapsto A \quad B \mapsto K \quad D' \mapsto D \quad X \mapsto Y.$$

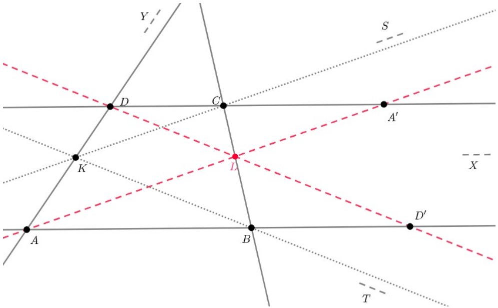
Z zachowywania dwustosunku przez rzut środkowy mamy $(XABD') = (YAKD)$.



Teraz rozpatrzy rzut środkowy z prostej CD w prostą AD o środku w punkcie S. Mamy

$$A' \mapsto A \quad C \mapsto K \quad D \mapsto D \quad X \mapsto Y.$$

Z zachowywania dwustosunku przez rzut środkowy mamy $(XA'CD) = (YAKD)$.



Teraz rozpatrzy rzut środkowy z prostej CD w prostą AD o środku w punkcie S. Mamy

$$A' \mapsto A \quad C \mapsto K \quad D \mapsto D \quad X \mapsto Y.$$

Z zachowywania dwustosunku przez rzut środkowy mamy $(XA'CD) = (YAKD)$.

Mamy więc $(XABD') = (YAKD) = (XA'CD)$, czyli to co chcieliśmy udowodnić.

Definicja

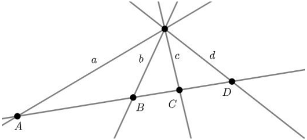
Pękiem prostych nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt.

Definicja

Pękiem prostych nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt.

Dwustosunek w pęku prostych

Niech a, b, c, d będą różnymi prostymi należącymi do jednego pęku prostych. Dwustosunkiem czwórki prostych będziemy nazywali wielkość $(abcd)$ równą dwustosunkowi czwórki punktów A, B, C, D, które są przecięciami naszych czterech prostych z dowolną prostą nie należącą do wyróżnionego pęku.

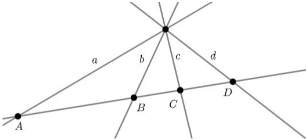


Definicja

Pękiem prostych nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt.

Dwustosunek w pęku prostych

Niech a, b, c, d będą różnymi prostymi należącymi do jednego pęku prostych. Dwustosunkiem czwórki prostych będziemy nazywali wielkość $(abcd)$ równą dwustosunkowi czwórki punktów A, B, C, D, które są przecięciami naszych czterech prostych z dowolną prostą nie należącą do wyróżnionego pęku.



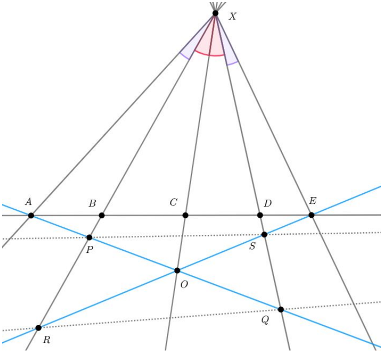
Poprawność definicji jest ponownie zagwarantowana przez niezmienniczość dwustosunku względem rzutu środkowego.

Zadanie

Punkty A, B, C, D, E leżą na jednej prostej w podanej kolejności. Punkt X wybrano w taki sposób, że $\angle AXB = \angle EXD$ oraz $\angle BXC = \angle DXC$. Punkt O leży na prostej XC. Prosta AO tnie prostą XB w punkcie P i prostą XD w punkcie Q. Prosta EO tnie proste XB i XD w punktach R i S. Pokazać, że proste AB, RQ, PS przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

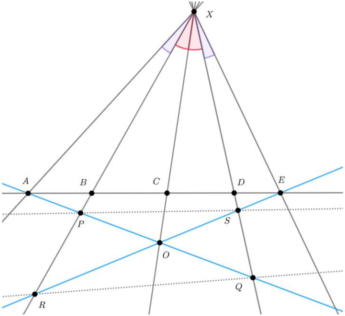
Zadanie

Punkty A, B, C, D, E leżą na jednej prostej w podanej kolejności. Punkt X wybrano w taki sposób, że $\angle AXB = \angle EXD$ oraz $\angle BXC = \angle DXC$. Punkt O leży na prostej XC. Prosta AO tnie prostą XB w punkcie P i prostą XD w punkcie Q. Prosta EO tnie proste XB i XD w punktach R i S. Pokazać, że proste AB, RQ, PS przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

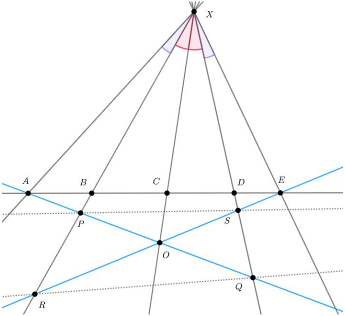


Posługując się geometrią rzutową wystarczy pokazać, że wskazane trzy proste przecinają się w jednym punkcie – jeśli jest to punkt właściwy to te trzy proste przecinają się w jednym punkcie w sensie zwykłej geometrii płaskiej, a jeśli jest to punkt niewłaściwy to wskazane proste są równoległe.

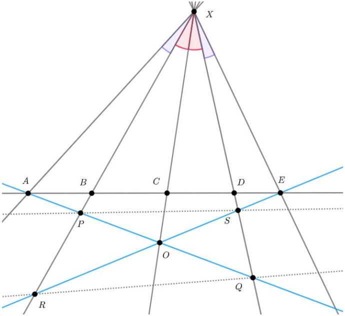
Posługując się geometrią rzutową wystarczy pokazać, że wskazane trzy proste przecinają się w jednym punkcie – jeśli jest to punkt właściwy to te trzy proste przecinają się w jednym punkcie w sensie zwykłej geometrii płaskiej, a jeśli jest to punkt niewłaściwy to wskazane proste są równoległe.



Ponownie skorzystamy z pierwszego zadania – wystarczy pokazać, że $(OAPQ) = (OESR)$.

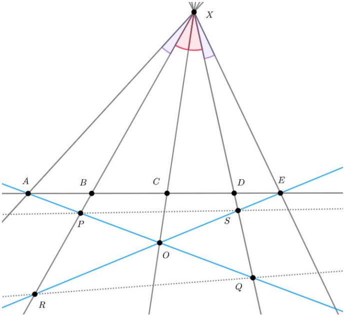


Rozpatrzmy rzut z prostej AO w prostą AB o środku w punkcie X. Analizując obrazy punktów A, P, O, Q otrzymujemy równość $(OAPQ) = (CABD)$. Z definicji dwustosunku w pęku mamy $(OAPQ) = (CABD) = (XC, XA, XB, XD)$.



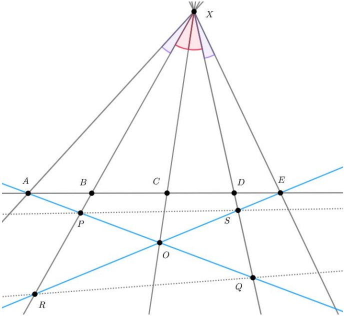
Rozpatrzmy rzut z prostej AO w prostą AB o środku w punkcie X. Analizując obrazy punktów A, P, O, Q otrzymujemy równość $(OAPQ) = (CABD)$. Z definicji dwustosunku w pęku mamy $(OAPQ) = (CABD) = (XC, XA, XB, XD)$.

Teraz wystarczy zauważyć, że symetria względem prostej z danego pęku nie zmienia wartości dwustosunku czwórki punktów z tego pęku.



Rozpatrzmy więc symetrię względem prostej XC. Przeprowadza ona prostą XA na prostą XE, prostą XB na prostą XD, a prosta XC jest punktem stałym tego przekształcenia. Mamy więc

$$(OAPQ) = (CABD) = (XC, XA, XB, XD) = (XC, XE, XD, XB).$$



Ponownie korzystając z definicji dwustosunku w pęku prostych i rzutu środkowego o środku w punkcie X otrzymujemy

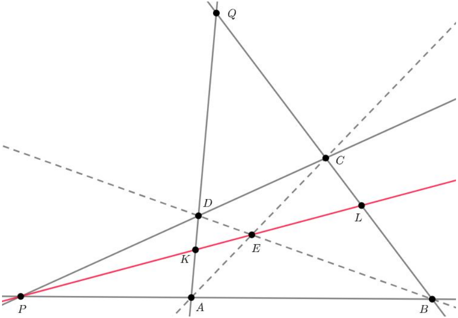
$$(OAPQ) = (XC, XE, XD, XB) = (CEDB) = (OESR),$$

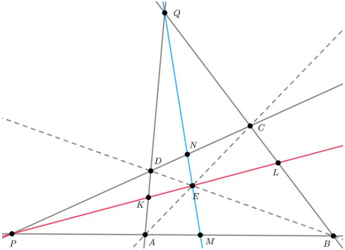
co chcieliśmy udowodnić.

Rozważmy często spotykaną konfigurację.

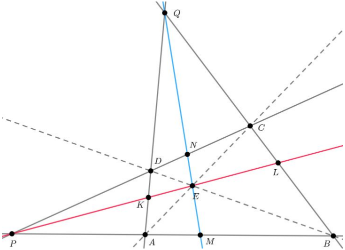
Rozważmy często spotykaną konfigurację.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt P jest przecięciem prostych AB i CD, a punkt Q jest przecięciem prostych AD i BC. Punkt E jest przecięciem przekątnych trapezu. Prosta PE przecina proste AD i BC w punktach K i L. Wtedy czwórka punktów P, E, K, L jest harmoniczna tzn. $(PEKL) = -1$.





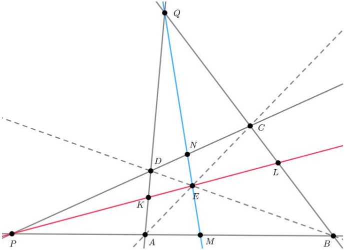
Oznaczmy przecięcie prostej QE z prostymi AB i CD jako M i N.



Oznaczmy przecięcie prostej QE z prostymi AB i CD jako M i N.

Rozpatrzmy rzut środkowy o środku w punkcie Q z prostej PE w prostą CD. Mamy

$$(PEKL) = (PNDC).$$



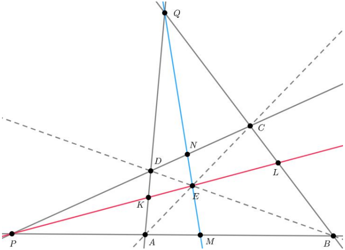
Oznaczmy przecięcie prostej QE z prostymi AB i CD jako M i N.

Rozpatrzmy rzut środkowy o środku w punkcie Q z prostej PE w prostą CD. Mamy

$$(PEKL) = (PNDC).$$

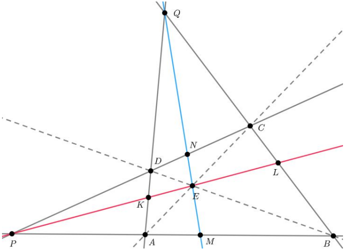
Teraz patrzymy na rzut o środku w punkcie E z prostej CD w prostą AB:

$$(PNDC) = (PMBA).$$



I ponownie rozpatrujemy rzut o środku w punkcie Q – rzucamy prostą AB w prsotą PE:

$$(PMBA) = (PELK).$$



I ponownie rozpatrujemy rzut o środku w punkcie Q – rzucamy prostą AB w prsotą PE:

$$(PMBA) = (PELK).$$

Mamy więc $(PEKL) = (PELK)$. Korzystając z własności dwustosunku otrzymujemy

$$(PEKL) = \frac{1}{(PEKL)}.$$

Oznacza to, że

$$(PEKL)^2 = 1,$$

czyli

$$(PEKL) = \pm 1.$$

Oznacza to, że

$$(PEKL)^2 = 1,$$

czyli

$$(PEKL) = \pm 1.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że dwustosunek nigdy nie może być równy 1. Byłoby to sprzeczne z tym, że dwustosunek definiujemy dla czterech parami różnych punktów.

Oznacza to, że

$$(PEKL)^2 = 1,$$

czyli

$$(PEKL) = \pm 1.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że dwustosunek nigdy nie może być równy 1. Byłoby to sprzeczne z tym, że dwustosunek definiujemy dla czterech parami różnych punktów.

Uwaga

W rozważaniach tych nie musimy przyjmować, że punkty P i Q są właściwe. Przeprowadzane rozważania nadal są w mocy, gdy jeden z tych punktów lub oba są punktami niewłaściwymi.

Jeśli $(ABCD) = -1$ i D jest kierunkiem prostej AB, to C jest środkiem odcinka AB.