Indukcja matematyczna

1. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ prawdziwa jest nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

3. Używając indukcji matematycznej pokazać, że liczba przekątnych w n-kącie wypukłym wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

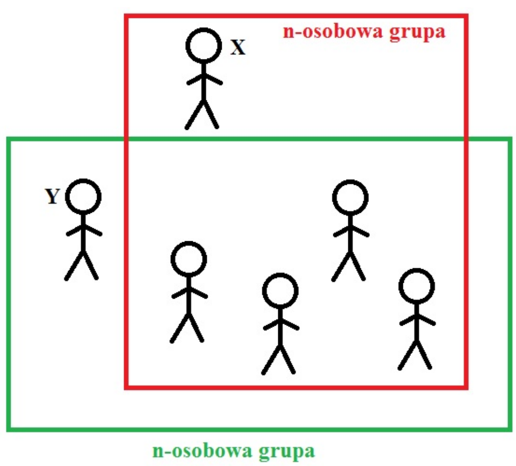
4. Niezrobione zadanie z prezentacji:

Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której w zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1 i 2.

5. Znaleźć błąd w następującym rozumowaniu indukcyjnym.

Teza: Wszyscy ludzie mają ten sam kolor oczu.

Dowód: Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ w grupie n-osobowej wszyscy mają ten sam kolor oczu. Takie twierdzenie możemy udowodnić, za pomocą indukcji.
Dla grupy jednoosobowej teza istotnie zachodzi – wszyscy (jedna osoba) w tej grupie mają ten sam kolor oczu.
Załóżmy, że w dowolnej n-osobowej grupie wszyscy mają ten sam kolor oczu i rozważmy pewną $(n+1)$-osobową grupę. Jeśli pominiemy chwilowo jedną osobę w tej grupie (nazwijmy ją X), to pozostałe osoby tworzą grupę n-osobową, a zatem każdy w tej grupie ma ten sam kolor oczu. Teraz chwilowo zapomnijmy o osobie Y – innej niż X. Znowu mamy do czynienia z grupą n-osobową, ale tym razem jest w niej X. Osoba X ma zatem ten sam kolor oczu co każda osoba w rozważanej n-osobowej grupie, a więc cała grupa $(n+1)$-osobowa ma ten sam kolor oczu.



Na następnej stronie znajdują się wskazówki.

Wskazówki:

2. Jednym ze sposobów rozwiązania jest przekształcenie nierówności do postaci

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4. Niech a_n będzie szukaną liczbą dla n. Rozważyć liczby $10^n + a_n$ i $2 \cdot 10^n + a_n$ jako kandydatów na a_{n+1}.

5. Czy opisany krok indukcyjny działa dla wszystkich $n \geqslant 1$?