Indukcja matematyczna

Radosław Opoka

Koło Pasjonatów Matematyki UW

17 maja 2021

Indukcja matematyczna jest sposobem dowodzenia twierdzeń.

Indukcja matematyczna jest sposobem dowodzenia twierdzeń.

Nas będzie interesowało jej zastosowanie w twierdzeniach brzmiących mniej więcej tak:
Dla wszystkich liczb naturalnych (lub liczb całkowitych większych od ustalonej liczby) zachodzi "coś".

Indukcja matematyczna jest sposobem dowodzenia twierdzeń.

Nas będzie interesowało jej zastosowanie w twierdzeniach brzmiących mniej więcej tak:
Dla wszystkich liczb naturalnych (lub liczb całkowitych większych od ustalonej liczby) zachodzi "coś".

Przykład

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma wszystkich liczb całkowitych, dodatnich, nie większych niż n wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$ tzn.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Indukcja matematyczna jest sposobem dowodzenia twierdzeń.

Nas będzie interesowało jej zastosowanie w twierdzeniach brzmiących mniej więcej tak:
Dla wszystkich liczb naturalnych (lub liczb całkowitych większych od ustalonej liczby) zachodzi "coś".

Przykład

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma wszystkich liczb całkowitych, dodatnich, nie większych niż n wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$ tzn.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Aby uniknąć wątpliwości ustalmy, że przez liczby naturalne będziemy rozumieli zbiór $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Indukcyjny dowód twierdzeń jest złożony z dwóch kroków.

Indukcyjny dowód twierdzeń jest złożony z dwóch kroków.

Krok 1 Udowadniamy twierdzenie dla n będącego najmniejszą liczbą w rozważanym zbiorze.

Krok 2 Udowadniamy, że jeśli twierdzenie zachodzi dla dowolnego n z naszego zbioru, to twierdzenie zachodzi również dla $n+1$.

Czemu powyższe rozumowanie faktycznie jest dowodem, że wszystkie liczby naturalne (lub liczby całkowite większe od ustalonej liczby) spełniają jakąś własność?

Czemu powyższe rozumowanie faktycznie jest dowodem, że wszystkie liczby naturalne (lub liczby całkowite większe od ustalonej liczby) spełniają jakąś własność?

Rozpatrzmy liczby naturalne i twierdzenie: "dla wszystkich liczb naturalnych zachodzi własność W".

Udowodnienie kroku pierwszego oznacza, że dla 0 zachodzi własność W.

Natomiast udowodnienie kroku drugiego oznacza, że jeśli mamy dowolną liczbę n, dla której zachodzi własność W, to wiemy też, że dla liczby $n+1$ zachodzi własność W.

Zatem skoro dla 0 zachodzi własność W, to na mocy kroku drugiego zachodzi też dla 1. Skoro wiemy już, że dla 1 zachodzi własność W, to znowu na mocy kroku drugiego własność W zachodzi również dla 2. A skoro dla 2, to i dla 3, a więc i dla 4 itd.

Wróćmy do przedstawionego wcześniej przykładu i spróbujmy udowodnić przedstawione w nim twierdzenie.

Przykład

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma wszystkich liczb całkowitych, dodatnich, nie większych niż n wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$ tzn.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Wróćmy do przedstawionego wcześniej przykładu i spróbujmy udowodnić przedstawione w nim twierdzenie.

Przykład

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma wszystkich liczb całkowitych, dodatnich, nie większych niż n wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$ tzn.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Krok 1 Jeśli $n = 1$ (najmniejsza liczba w naszym zbiorze), to musimy sprawdzić czy $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$. Tak faktycznie jest.

Krok 2 Bierzemy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zakładamy, że zachodzi

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Chcemy pokazać, że

$$1 + 2 + ... + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1).$$

Skoro

$$1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

to

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1),$$

a więc

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie (nierówność Bernoulliego)

Niech a będzie liczbą rzeczywistą i $a \geqslant -1$. Udowodnij, że dla każdej naturalnej liczby $n \geqslant 1$ zachodzi

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + an.$$

Zadanie (nierówność Bernoulliego)

Niech a będzie liczbą rzeczywistą i $a \geqslant -1$. Udowodnij, że dla każdej naturalnej liczby $n \geqslant 1$ zachodzi

$$(1+a)^n \geqslant 1 + an.$$

Sprawdźmy czy teza zachodzi dla $n = 1$.

$$(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a.$$

Teraz ustalmy $n \geqslant 1$ i załóżmy, że

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Wtedy, jako, że $1 + a \geqslant 0$,

$$(1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant (1+na)(1+a),$$

a więc

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \cdot a + na^2 \geqslant 1 + (n+1) \cdot a.$$

Zadanie

Pokazać, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $2^n \geqslant n$.

Zadanie

Pokazać, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $2^n \geqslant n$.

Postępujemy standardowo: jeśli $n = 0$, to faktycznie zachodzi $2^n \geqslant n$ ($2^0 = 1 \geqslant 0$).
Zakładamy, że dla pewnego n zachodzi $2^n \geqslant n$. Czy z tego wynika, że $2^{n+1} \geqslant n + 1$?
Przekształcamy więc nierówność $2^n \geqslant n$:

$$2^n \cdot 2 \geqslant 2n$$

$$2^{n+1} \geqslant 2n$$

Wystarczy zatem pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $2n \geqslant n + 1$:

$$2n - n \geqslant n + 1 - n$$

$$n \geqslant 1$$

Okazuję się jednak, że nierówność $2n \geqslant n + 1$ nie zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a jedynie dla $n \geqslant 1$.

Jak rozwiązać ten problem?

Jak rozwiązać ten problem? Możemy rozdzielić problem na dwa:

1) pokazać, że dla $n = 0$ mamy $2^n \geqslant n$;

2) pokazać indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $2^n \geqslant n$.

Jak rozwiązać ten problem? Możemy rozdzielić problem na dwa:

1) pokazać, że dla $n = 0$ mamy $2^n \geqslant n$;

2) pokazać indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $2^n \geqslant n$.

Czyli tak naprawdę sprawdzamy "krok 1" dla dwóch początkowych wartości, a potem postępujemy zgodnie z "krokiem 2" zakładając, że liczba $n = 1$ jest najmniejszą liczbą, która nas interesuje.

Jak rozwiązać ten problem? Możemy rozdzielić problem na dwa:

1) pokazać, że dla $n = 0$ mamy $2^n \geqslant n$;

2) pokazać indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $2^n \geqslant n$.

Czyli tak naprawdę sprawdzamy "krok 1" dla dwóch początkowych wartości, a potem postępujemy zgodnie z "krokiem 2" zakładając, że liczba $n = 1$ jest najmniejszą liczbą, która nas interesuje.

Zatem dokończmy nasze rozumowanie:
punkt 1) już zrobiliśmy, a do uzupełnienia punktu 2) wystarczy sprawdzić czy $2^1 \geqslant 1$, co jest oczywiście prawdą.

Jak rozwiązać ten problem? Możemy rozdzielić problem na dwa:

1) pokazać, że dla $n = 0$ mamy $2^n \geqslant n$;

2) pokazać indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $2^n \geqslant n$.

Czyli tak naprawdę sprawdzamy "krok 1" dla dwóch początkowych wartości, a potem postępujemy zgodnie z "krokiem 2" zakładając, że liczba $n = 1$ jest najmniejszą liczbą, która nas interesuje.

Zatem dokończmy nasze rozumowanie:
punkt 1) już zrobiliśmy, a do uzupełnienia punktu 2) wystarczy sprawdzić czy $2^1 \geqslant 1$, co jest oczywiście prawdą.

Inaczej mówiąc: skoro "krok 2" działa w naszym przypadku dopiero od $n = 1$, to sprawdźmy "krok 1" dla $n = 1$, a dodatkowo sprawdźmy czy teza zachodzi dla $n = 0$.

Jak rozwiązać ten problem? Możemy rozdzielić problem na dwa:

1) pokazać, że dla $n = 0$ mamy $2^n \geqslant n$;

2) pokazać indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $2^n \geqslant n$.

Czyli tak naprawdę sprawdzamy "krok 1" dla dwóch początkowych wartości, a potem postępujemy zgodnie z "krokiem 2" zakładając, że liczba $n = 1$ jest najmniejszą liczbą, która nas interesuje.

Zatem dokończmy nasze rozumowanie:
punkt 1) już zrobiliśmy, a do uzupełnienia punktu 2) wystarczy sprawdzić czy $2^1 \geqslant 1$, co jest oczywiście prawdą.

Inaczej mówiąc: skoro "krok 2" działa w naszym przypadku dopiero od $n = 1$, to sprawdźmy "krok 1" dla $n = 1$, a dodatkowo sprawdźmy czy teza zachodzi dla $n = 0$.

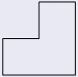
Jeśliby nasz "krok 2" działał dopiero od $n = 4$, to sprawdzając "krok 1" dla $n = 4$ i udowadniając "krok 2" pokazalibyśmy, że teza zachodzi dla liczb $n \geqslant 4$. Sprawdzając pozostałe przypadki – $n = 0, 1, 2, 3$, "ręcznie" pokazujemy, że teza zachodzi jednak dla wszystkich $n \geqslant 0$.

Indukcja może posłużyć również do pokazywania pewnych geometrycznych, bądź kombinatorycznych tez.

Indukcja może posłużyć również do pokazywania pewnych geometrycznych, bądź kombinatorycznych tez.

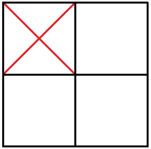
Zadanie

Dana jest szachownica (pokratkowana plansza) o wymiarach 2^n x 2^n, $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 1$. Klockiem będziemy nazywali figurę złożoną z trzech kwadratów jednostkowych (kwadratów wielkości jednego pola na planszy) ułożonych w kształt litery L:



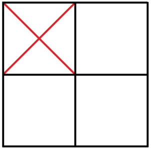
Pokazać, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ możemy pokryć klockami daną planszę z usuniętym dowolnym jednym polem (klocki pokrywają figurę, gdy każde pole figury przykrywa dokładnie jeden klocek i żaden z klocków nie wystaje poza figurę; klocki możemy obracać przed położeniem na planszy).

Sprawdźmy co się dzieje dla $n = 1$.
Mamy do czynienia z planszą 2 x 2, z której usuwamy jedno pole. Plansza ta wygląda więc, z dokładnością do obrotu, tak:



W oczywisty sposób możemy pokryć taką planszę naszymi klockami (a dokładnie jednym klockiem).

Sprawdźmy co się dzieje dla $n = 1$.
Mamy do czynienia z planszą 2 x 2, z której usuwamy jedno pole. Plansza ta wygląda więc, z dokładnością do obrotu, tak:

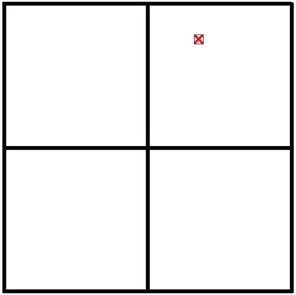


W oczywisty sposób możemy pokryć taką planszę naszymi klockami (a dokładnie jednym klockiem).

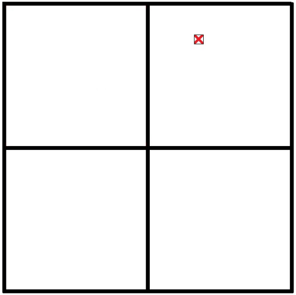
Teraz robimy tzw. założenie indukcyjne – zakładamy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ nasza teza zachodzi, tzn. jesteśmy w stanie pokryć klockami planszę 2^n x 2^n z usuniętym dowolnym polem.

Na podstawie tego założenie musimy udowodnić, że umiemy pokryć naszymi klockami planszę o wymiarach 2^{n+1} x 2^{n+1} z usuniętym dowolnym polem.

Rozważmy zatem planszę o wymiarach 2^{n+1} x 2^{n+1} z usuniętym jednym polem.

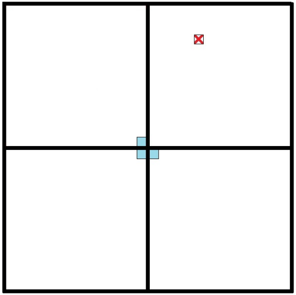


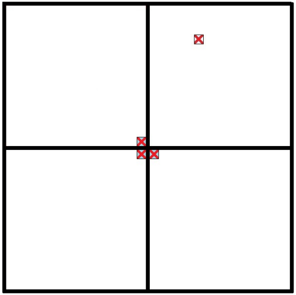
Rozważmy zatem planszę o wymiarach 2^{n+1} x 2^{n+1} z usuniętym jednym polem.



Taką planszę możemy podzielić na cztery ćwiartki – kwadratowe plansze o wymiarach 2^n x 2^n. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że usunięte pole znajduje się w prawej, górnej ćwiartce. Ćwiartka ta jest planszą o wymiarach 2^n x 2^n z usuniętym jednym polem, zatem z założenia indukcyjnego możemy ją pokryć naszymi klockami.

Pozostaje zatem pokryć klockami pozostałe trzy ćwiartki. W tym celu weźmy jeden klocek i połóżmy go na naszej planszy w ten sposób, by przykrywał on prawe, dolne pole w lewej, górnej ćwiartce; prawe, górne pole w lewej, dolnej ćwiartce; oraz lewe, górne pole w prawej, dolnej ćwiartce (patrz rysunek). Są to pola najbliżej środka całej planszy w każdej z trzech rozważanych ćwiartek.





Każda z trzech ćwiartek jest teraz planszą o wymiarach 2^n x 2^n, w której jedno pole jest już przykryte – mamy zatem do czynienia z problemem przykrycia klockami planszy 2^n x 2^n bez jednego pola. Z założenia indukcyjnego my umiemy to zrobić. Pokrywamy więc każdą z trzech (wybrakowanych) ćwiartek klockami i uzyskujemy szukane pokrycie całej planszy.

Zadanie

Pokazać, że n prostych ($n \geqslant 1$) dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n obszarów.

Zadanie

Pokazać, że n prostych ($n \geqslant 1$) dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n obszarów.

Jedna prosta dzieli płaszczyznę na dwie części, zatem teza jest spełniona dla $n = 1$.

Załóżmy, że na płaszczyźnie jest narysowane już n prostych, które dzielą płaszczyznę na co najwyżej 2^n części.
Jeśli dorysujemy kolejną prostą, to każdą z części płaszczyzny albo nie zostanie podzielona przez tą prostą, albo zostanie podzielona na dokładnie dwie części. Zatem liczba obszarów, na które została podzielona płaszczyzna przez $n+1$ prostych jest nie większa niż $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Zadanie

Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której w zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1 i 2.

Zadanie

Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której w zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1 i 2.

Dla $n = 1$ mamy $2^n = 1$, a więc $a_n = 1$ jest szukaną n-cyfrową wielokrotnością 2^n, w której zapisie dziesiętnym pojawiają się jedynie cyfry 1 i 2.

Zadanie

Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której w zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1 i 2.

Dla $n = 1$ mamy $2^n = 1$, a więc $a_n = 1$ jest szukaną n-cyfrową wielokrotnością 2^n, w której zapisie dziesiętnym pojawiają się jedynie cyfry 1 i 2. Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \geqslant 1$ teza zadania jest

spełniona tzn istnieje a_n o własnościach opisanych w treści zadania. Poszukujemy liczby a_{n+1}. Rozpatrzmy dwie liczby: $10^n + a_n$ oraz $2 \cdot 10^n + a_n$. Obie te liczby mają $n + 1$ cyfr i w ich zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1 i 2 – liczby te powstały przez dopisanie cyfry 1 lub 2 przed zapisem dziesiętnym liczby a_n. Pozostaje sprawdzić czy są one wielokrotnością liczby $2^n + 1$.

$$10^n + a_n = 5^n \cdot 2^n + K \cdot 2^n = (5^n +) \cdot 2^n$$

$$2 \cdot 10^n + a_n = 5^n \cdot 2^n + 1 + K \cdot 2^n = (2 \cdot 5^n + k) \cdot 2^n$$

Jeśli liczba K jest nieparzysta, to liczba $5^n + k$ jest parzysta, a więc $5^n + k = 2m$, i stąd $10^n + a_n = 2^{n+1} \cdot m$.

Natomiast jeśli liczba K jest parzysta, to liczba $2 \cdot 5^n + k$ jest parzysta, czyli $2 \cdot 5^n + k = 2m$, a więc $2 \cdot 10^n + a_n = 2^{n+1} \cdot m$.

Liczba k jest zawsze parzysta lub nieparzysta, a więc zawsze zawsze jesteśmy w stanie wybrać spośród liczb $10^n + a_n$ i $2 \cdot 10^n + a_n$ liczbę, która jest wielokrotnością 2^{n+1} – jest to szukane a_{n+1}.

Czasem założenie, że teza zachodzi dla pewnej liczby n nie wystarcza, by pokazać, że ta sama teza zachodzi dla liczby $n+1$. Istnieje jednak pewne wzmocnienie wnioskowania indukcyjnego – silna indukcja/indukcja zupełna.

Czasem założenie, że teza zachodzi dla pewnej liczby n nie wystarcza, by pokazać, że ta sama teza zachodzi dla liczby $n+1$. Istnieje jednak pewne wzmocnienie wnioskowania indukcyjnego – silna indukcja/indukcja zupełna.

Wykonujemy "krok 1" – tak samo jak do tej pory, ale w kroku indukcyjnym ("krok 2"), by udowodnić, że teza zachodzi dla liczby $n+1$ zakładamy, że teza zachodzi dla wszystkich liczb z rozważanego zbioru, które są mniejsze od $n+1$.

Czasem założenie, że teza zachodzi dla pewnej liczby n nie wystarcza, by pokazać, że ta sama teza zachodzi dla liczby $n+1$. Istnieje jednak pewne wzmocnienie wnioskowania indukcyjnego – silna indukcja/indukcja zupełna.

Wykonujemy "krok 1" – tak samo jak do tej pory, ale w kroku indukcyjnym ("krok 2"), by udowodnić, że teza zachodzi dla liczby $n+1$ zakładamy, że teza zachodzi dla wszystkich liczb z rozważanego zbioru, które są mniejsze od $n+1$.

Na przykład jeślibyśmy chcieli udowodnić, że wszystkie liczby naturalne większe lub równe 4 spełniają pewną własność W, to w roku indukcyjnym zakładamy, że liczby 4, 5, 6, ..., $n-1$, n spełniają własność W i na tej podstawie udowadniamy, że liczba $n+1$ spełnia własność W.

Zadanie

Pokazać, że każda liczba naturalne większa od 1 jest pierwsza lub daje się zapisać jako iloczyn liczb pierwszych.

Zadanie

Pokazać, że każda liczba naturalne większa od 1 jest pierwsza lub daje się zapisać jako iloczyn liczb pierwszych.

Będziemy korzystali z indukcji zupełnej.

Sprawdźmy, czy teza zachodzi dla najmniejszej z rozważanych liczb – liczba $n = 2$ jest liczbą pierwszą, a zatem teza jest spełniona.

Załóżmy, że teza zachodzi dla liczb 2, 3, ...,n. Jeśli liczba $n + 1$ jest pierwsza to teza jest spełniona w oczywisty sposób. Jeśli $n + 1$ nie jest liczbą pierwszą, to daje się zapisać jako iloczyn dwóch liczb, z których każda jest większa od 1, a więc zarazem każda z nich jest mniejsza od $n + 1$.

$$n + 1 = m_1 \cdot m_2 \qquad 2 \leqslant m_1, m_2 \leqslant n$$

Zatem założenia indukcyjnego każda z liczb m_1, m_2 jest pierwsza, albo przedstawia się jako iloczyn liczb pierwszych, a więc $n + 1$ przestawia się jako iloczyn liczb pierwszych.

Zadanie

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest następująco: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.
Pokazać, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Zadanie

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest następująco: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.
Pokazać, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Skoro do policzenia F_n dla $n \geqslant 2$ potrzebujemy znać dwa poprzednie wyrazy ciągu, to podchodząc indukcyjnie do rozwiązania tego problemu musimy lekko zmodyfikować nasze rozumowanie: w "kroku 2", by udowodnić tezę dla liczby n będziemy zakładali jej prawdziwość dla liczb $n-1$ oraz $n-2$. To z kolei wymusza, by w "kroku 1" udowodnić tezę nie tylko dla $n = 0$, ale również dla $n = 1$. Zróbmy to.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$= F_1$$

Pokazaliśmy więc nasz zmodyfikowany "krok 1".

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right)=1$$
$$=F_1$$

Pokazaliśmy więc nasz zmodyfikowany "krok 1".

Teraz załóżmy, że F_{n-2} i F_{n-1} przedstawiają się w sposób opisany w tezie. Policzmy F_n dla $n \geqslant 2$:

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Pokazaliśmy krok indukcyjny, a więc dokończyliśmy dowód tego zadania.