Inwersja względem okręgu

1. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w dwóch (różnych) punktach A, B. Prosta k jest wspólną styczną do okręgów ω_1, ω_2. Punkty styczności k do ω_1 i ω_2 to odpowiednio X, Y. Niech C będzie środkiem odcinka XY. Pokazać, używając inwersji, że punkty A, B, C są współliniowe.
* Zadanie to można udowodnić używając osi potęgowych. Potraktujmy więc to zadanie jako ćwiczenie na użycie inwersji.

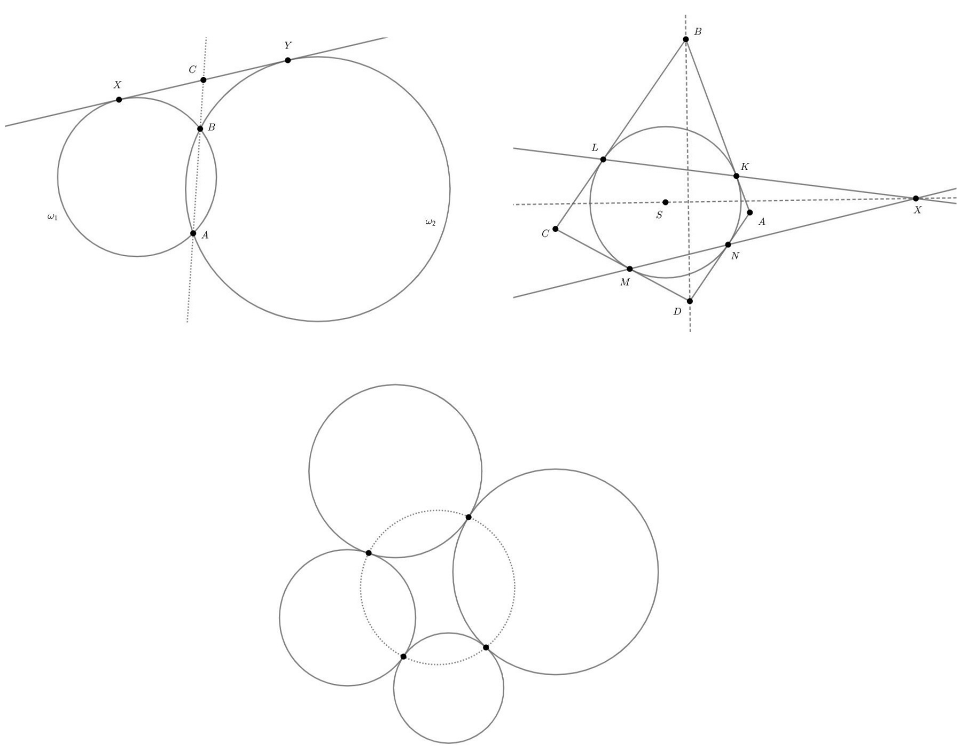
Definicja Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O. Biegunową punktu P, $P \neq O$, względem okręgu ω nazywamy prostą, która przechodzi przez obraz inwersyjny punktu P względem okręgu ω i jest prostopadła do prostej OP.

2. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O, oraz punkty A, B różne od O. Pokazać, że jeśli B leży na biegunowej punktu A względem okręgu ω, to A leży na biegunowej punktu B względem okręgu ω.

3. Używając tezy zadania 2, uprościć rozwiązanie zadania z prezentacji:

Okrąg o środku w punkcie S jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty styczności tego okręgu do boków AB, BC, CD, DA to odpowiednio K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie X. Pokazać, że proste BD i XS są prostopadłe.

4. Dane są cztery rozłączne okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Każdy z okręgów ω_1, ω_3 jest styczny zewnętrznie do każdego z okręgów ω_2, ω_4. Pokazać, że na punktach styczności tych okręgów można opisać okrąg.



Rysunki do zadań 1, 3 i 4.