Inwersja względem okręgu

Radosław Opoka

Koło Pasjonatów Matematyki UW

26 kwietnia 2021
10 maja 2021

Inwersja względem okręgu jest przekształceniem płaszczyzny[1].

[1] całej lub prawie całej płaszczyzny – w zależności od podejścia

Inwersja względem okręgu jest przekształceniem płaszczyzny[1].
Określa ją następująca definicja.

Definicja

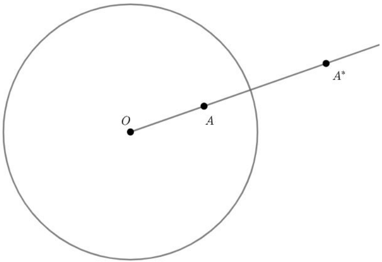
Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i promieniu r. Obrazem punktu $X \neq O$ w inwersji względem okręgu ω jest punkt X^* leżący na półprostej $\overrightarrow{OX}$ i taki, że $OX \cdot OX^* = r^2$.

[1] całej lub prawie całej płaszczyzny – w zależności od podejścia

Inwersja względem okręgu jest przekształceniem płaszczyzny[1]. Określa ją następująca definicja.

Definicja

Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i promieniu r. Obrazem punktu $X \neq O$ w inwersji względem okręgu ω jest punkt X^* leżący na półprostej $\overrightarrow{OX}$ i taki, że $OX \cdot OX^* = r^2$.



[1] całej lub prawie całej płaszczyzny – w zależności od podejścia

Obserwacja

Jeśli B jest obrazem punktu A w pewnej inwersji, to A jest obrazem punktu B w tej samej inwersji.

Obserwacja

Jeśli B jest obrazem punktu A w pewnej inwersji, to A jest obrazem punktu B w tej samej inwersji.

Punkt B jest obrazem punktu A, gdy $B \in \overrightarrow{OA}$ i $OA \cdot OB = r^2$. Wtedy też $A \in \overrightarrow{OB}$ i $OB \cdot OA = r^2$, zatem punkt A jes obrazem punktu B.

Obserwacja

Jeśli B jest obrazem punktu A w pewnej inwersji, to A jest obrazem punktu B w tej samej inwersji.

Punkt B jest obrazem punktu A, gdy $B \in \overrightarrow{OA}$ i $OA \cdot OB = r^2$. Wtedy też $A \in \overrightarrow{OB}$ i $OB \cdot OA = r^2$, zatem punkt A jes obrazem punktu B.
To oznacza, że jeśli przez f oznaczymy inwersję, to dla każdego punktu $X \neq O$ zachodzi $f(f(X)) = X$ – takie przekształcenia nazywamy inwolucjami.

Obserwacja

Jeśli B jest obrazem punktu A w pewnej inwersji, to A jest obrazem punktu B w tej samej inwersji.

Punkt B jest obrazem punktu A, gdy $B \in \overrightarrow{OA}$ i $OA \cdot OB = r^2$. Wtedy też $A \in \overrightarrow{OB}$ i $OB \cdot OA = r^2$, zatem punkt A jes obrazem punktu B.
To oznacza, że jeśli przez f oznaczymy inwersję, to dla każdego punktu $X \neq O$ zachodzi $f(f(X)) = X$ – takie przekształcenia nazywamy inwolucjami.

Obserwacja

Punkt C jest punktem stałym (tzn. $C = C^*$) pewnej inwersji wtedy i tylko wtedy gdy C leży na okręgu inwersyjnym.

Obserwacja

Jeśli B jest obrazem punktu A w pewnej inwersji, to A jest obrazem punktu B w tej samej inwersji.

Punkt B jest obrazem punktu A, gdy $B \in \overrightarrow{OA}$ i $OA \cdot OB = r^2$. Wtedy też $A \in \overrightarrow{OB}$ i $OB \cdot OA = r^2$, zatem punkt A jes obrazem punktu B.
To oznacza, że jeśli przez f oznaczymy inwersję, to dla każdego punktu $X \neq O$ zachodzi $f(f(X)) = X$ – takie przekształcenia nazywamy inwolucjami.

Obserwacja

Punkt C jest punktem stałym (tzn. $C = C^*$) pewnej inwersji wtedy i tylko wtedy gdy C leży na okręgu inwersyjnym.

$$C \in \omega \iff OC = r \iff OC \cdot OC = r^2 \iff C^* = C$$

Co z punktem O?

Co z punktem O?
Możemy (zgodnie z intuicją) dodać do naszej płaszczyzny punkt "∞" i powiedzieć, że obrazem punktu O jest ∞ i odwrotnie.

Co z punktem O?
Możemy (zgodnie z intuicją) dodać do naszej płaszczyzny punkt "∞" i powiedzieć, że obrazem punktu O jest ∞ i odwrotnie.

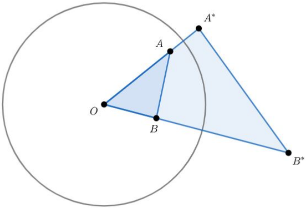
W takim wypadku przyjmujemy, że każda prosta przechodzi przez punkt "∞".

Zadanie

Dane są punkty O, A, B. Pokazać, że jeśli A^* i B^* są obrazami punktów A i B w inwersji względem pewnego okręgu o środku w O, to trójkąt $\triangle OAB$ jest podobny do trójkąta $\triangle OA^*B^*$.

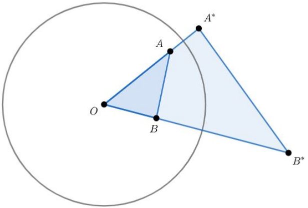
Zadanie

Dane są punkty O, A, B. Pokazać, że jeśli A^* i B^* są obrazami punktów A i B w inwersji względem pewnego okręgu o środku w O, to trójkąt $\triangle OAB$ jest podobny do trójkąta $\triangle OA^*B^*$.



Zadanie

Dane są punkty O, A, B. Pokazać, że jeśli A^* i B^* są obrazami punktów A i B w inwersji względem pewnego okręgu o środku w O, to trójkąt $\triangle OAB$ jest podobny do trójkąta $\triangle OA^*B^*$.



Rozważane trójkąty mają wspólny kąt przy wierzchołku O. Dodatkowo zachodzi

$$OA \cdot OA^* = r^2 = OB \cdot OB^*.$$

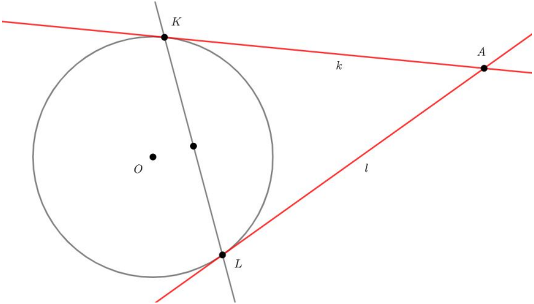
Stąd $\frac{OA}{OB} = \frac{OB^*}{OA^*}$, zatem faktycznie trójkąty $\triangle OAB$, $\triangle OB^*A^*$ są podobne.

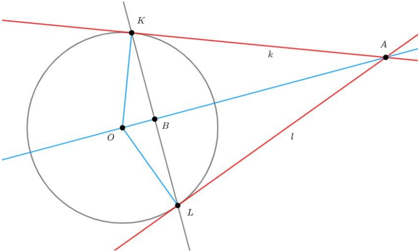
Zadanie

Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A na zewnątrz tego okręgu. Proste k i l są styczne do ω i przechodzą przez punkt A. Punkty styczności tych prostych z okręgiem ω nazwijmy K i L. Pokazać, że środek odcinka KL jest obrazem punktu A przy inwersji względem ω.

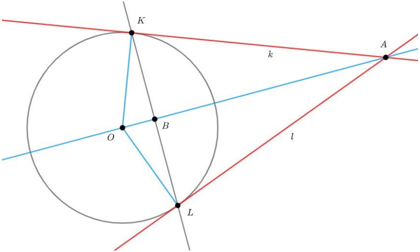
Zadanie

Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A na zewnątrz tego okręgu. Proste k i l są styczne do ω i przechodzą przez punkt A. Punkty styczności tych prostych z okręgiem ω nazwijmy K i L. Pokazać, że środek odcinka KL jest obrazem punktu A przy inwersji względem ω.





Środek odcinka KL oznaczmy przez B. Z symetrii punkt B leży na prostej OA. Dodatkowo B leży na OA po tej samej stronie punktu O co punkt A. Wystarczy zatem pokazać, że $OA \cdot OB = r^2$, gdzie r to promień okręgu. Trójkąty $\triangle OKA$ oraz $\triangle OBK$ są podobne – $\angle OKA = \angle KBA = 90^\circ$ oraz $\angle OKB = 90^\circ - \angle BKA = \angle KAB = \angle KAO$. Stąd $\frac{OB}{r} = \frac{r}{OA}$, co jest równoważne $OA \cdot OB = r^2$.



Środek odcinka KL oznaczmy przez B. Z symetrii punkt B leży na prostej OA. Dodatkowo B leży na OA po tej samej stronie punktu O co punkt A. Wystarczy zatem pokazać, że $OA \cdot OB = r^2$, gdzie r to promień okręgu. Trójkąty $\triangle OKA$ oraz $\triangle OBK$ są podobne – $\angle OKA = \angle KBA = 90^\circ$ oraz $\angle OKB = 90^\circ - \angle BKA = \angle KAB = \angle KAO$. Stąd $\frac{OB}{r} = \frac{r}{OA}$, co jest równoważne $OA \cdot OB = r^2$.

Uwaga

Zadanie to pokazuje jak konstruować obraz punkty przy inwersji względem okręgu.

Twierdzenie

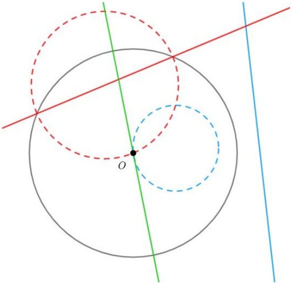
Inwersja przekształca proste i okręgi w następujący sposób:

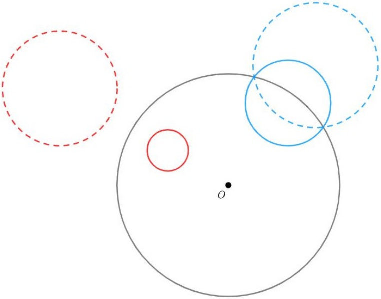
- Obrazem prostej przechodzącej przez O jest ta sama prosta.
- Obrazem prostej nieprzechodzącej przez O jest okrąg przechodzący przez O (i odwrotnie).
- Obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O jest okrąg nieprzechodzący przez O.

Twierdzenie

Inwersja przekształca proste i okręgi w następujący sposób:

- Obrazem prostej przechodzącej przez O jest ta sama prosta.
- Obrazem prostej nieprzechodzącej przez O jest okrąg przechodzący przez O (i odwrotnie).
- Obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O jest okrąg nieprzechodzący przez O.





Uwaga

Jeśli okrąg ω^* jest obrazem okręgu ω w pewnej inwersji, to środek ω^* nie musi być obrazem środka ω.

Uwaga

Jeśli okrąg ω^* jest obrazem okręgu ω w pewnej inwersji, to środek ω^* nie musi być obrazem środka ω.

Obserwacja

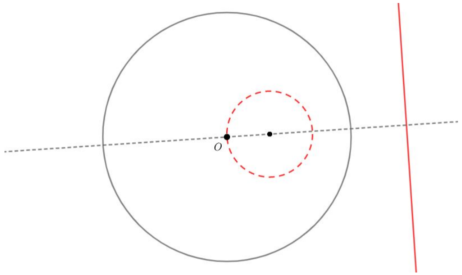
Niech k będzie prostą nieprzechodząca przez punkt O, a ω okręgiem, który jest obrazem prostej k w pewnej inwersji o środku w punkcie O. Wtedy prosta prostopadła do k przechodząca przez punkt O zawiera środek okręgu ω.

Uwaga

Jeśli okrąg ω^* jest obrazem okręgu ω w pewnej inwersji, to środek ω^* <u>nie musi</u> być obrazem środka ω.

Obserwacja

Niech k będzie prostą nieprzechodząca przez punkt O, a ω okręgiem, który jest obrazem prostej k w pewnej inwersji o środku w punkcie O. Wtedy prosta prostopadła do k przechodząca przez punkt O zawiera środek okręgu ω.



Obserwacja

Jeśli prosta/okrąg przecina prostą/okrąg w N punktach (wliczając punkt "∞"), to ich obrazy przecinają się również w N punktach (wliczając punkt "∞").

Obserwacja

Jeśli prosta/okrąg przecina prostą/okrąg w N punktach (wliczając punkt "∞"), to ich obrazy przecinają się również w N punktach (wliczając punkt "∞").

Wniosek

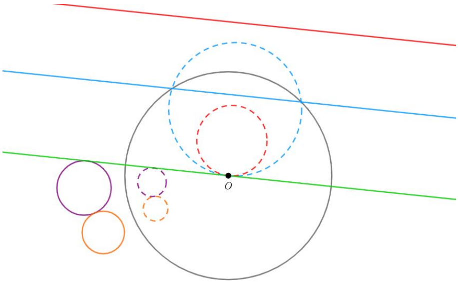
Proste/okręgi, które są do siebie równoległe/styczne przechodzą na obiekty równoległe/styczne.
(W ogólności inwersja zachowuje kąty.)

Obserwacja

Jeśli prosta/okrąg przecina prostą/okrąg w N punktach (wliczając punkt "∞"), to ich obrazy przecinają się również w N punktach (wliczając punkt "∞").

Wniosek

Proste/okręgi, które są do siebie równoległe/styczne przechodzą na obiekty równoległe/styczne.
(W ogólności inwersja zachowuje kąty.)

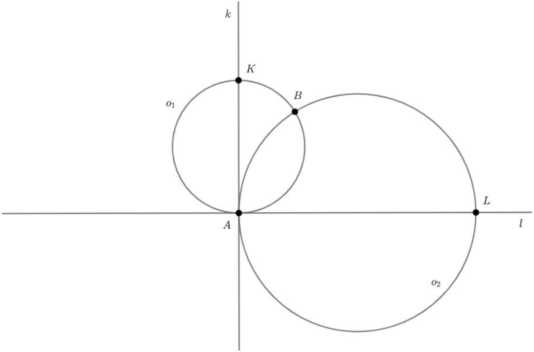


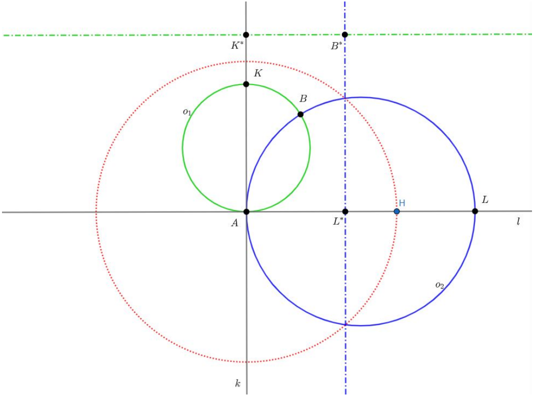
Zadanie

Proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie A. Punkt A leży na okrąg o_1, którego środek jest na prostej k. Punkt A leży również na okręgu o_2, którego środek jest na prostej l. Okręgi o_1 i o_2 tną się w punkcie B różnym od A. Okrąg o_1 przecina prostą k w punkcie K różnym od A, a okrąg o_2 przecina prostą l w punkcie L różnym od A. Pokazać, używając inwersji, że punkty K, B, L są współliniowe (można łatwo to pokazać bez używania inwersji, ale potraktujmy to jako ćwiczenie).

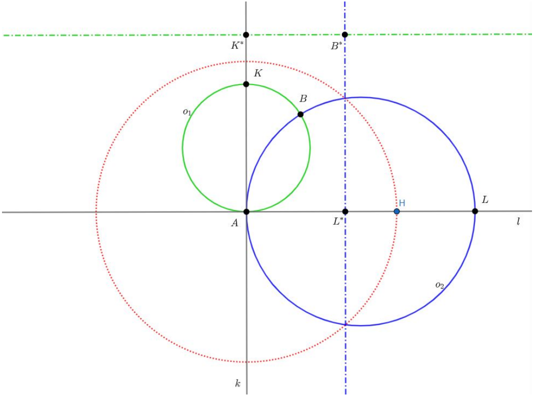
Zadanie

Proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie A. Punkt A leży na okrąg o_1, którego środek jest na prostej k. Punkt A leży również na okręgu o_2, którego środek jest na prostej l. Okręgi o_1 i o_2 tną się w punkcie B różnym od A. Okrąg o_1 przecina prostą k w punkcie K różnym od A, a okrąg o_2 przecina prostą l w punkcie L różnym od A. Pokazać, używając inwersji, że punkty K, B, L są współliniowe (można łatwo to pokazać bez używania inwersji, ale potraktujmy to jako ćwiczenie).





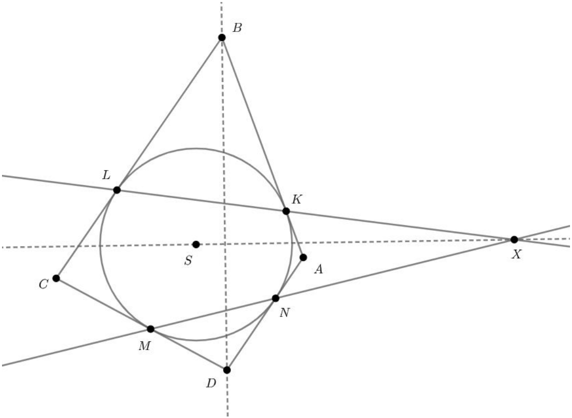
K^*
B^*
K
B
o_1
H
L
A
L^*
l
o_2
k

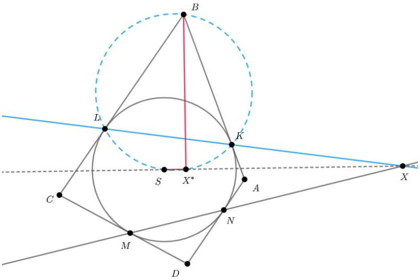


Rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie A i dowolnym promieniu. Obrazem okręgu o_1 jest prosta prostopadła do prostej k, a obrazem okręgu o_2 jest prosta prostopadła do prostej l. Punkt B^* jest przecięciem prostych o_1^*, o_2^*. Punkty A, K^*, B^* oraz L^* są więc wierzchołkami prostokąta. Oznacza to, że leżą one na jednym okręgu, a jako, że na okręgu tym leży A, to punkty K, B, L leżą na jednej prostej.

Zadanie (XLVII Olimpiada Matematyczna)

Okrąg o środku w punkcie S jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty styczności tego okręgu do boków AB, BC, CD, DA to odpowiednio K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie X. Pokazać, że proste BDi XS są prostopadłe.





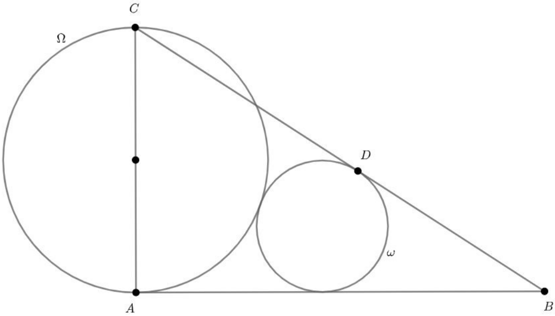
Rozpatrzmy inwersję względem okręgu danego w zadaniu. Obrazem prostej KL jest okrąg ω przechodzący przez K, L, S. Dodatkowo punkt B leży na ω, ponieważ $\angle SLB + \angle SKB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Widać również, że SB jest średnicą tego okręgu ($\angle SKB = 90^\circ$). Punkt X leży na prostej KL, a zatem jego obraz X^* leży na okręgu ω. Skoro odcinek SB jest średnicą okręgu ω, to kąt SX^*B jest prosty. Analogicznie udowadniamy, że $\angle SX^*D = 90^\circ$. Wynika stąd, że X^* leży na prostej BD, a prosta ta jest prostopadła do prostej SX^*. Jednak X^* leży oczywiście na prostej SX, zatem prosta BD faktycznie jest prostopadła do prostej SX.

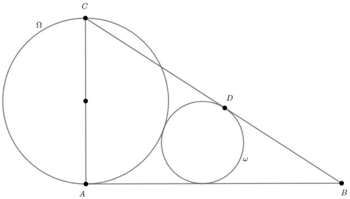
Zadanie

Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech Ω będzie okręgiem o średnicy AC. Okrąg ω jest styczny do prostych AB i AC. Ponadto jest on styczny zewnętrznie do okręgu Ω. Niech D będzie punktem styczności ω i prostej BC. Pokazać, że $AC = DC$.

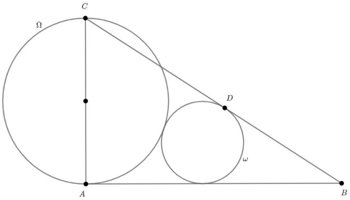
Zadanie

Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech Ω będzie okręgiem o średnicy AC. Okrąg ω jest styczny do prostych AB i AC. Ponadto jest on styczny zewnętrznie do okręgu Ω. Niech D będzie punktem styczności ω i prostej BC. Pokazać, że $AC = DC$.

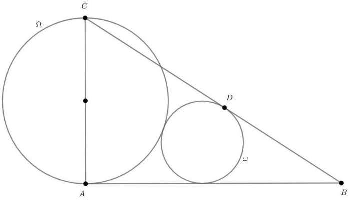




Rozpatrzmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie C i promieniu AC. Punkt A jest punktem stałym tego przekształcenia, a kąt $\angle CAB$ jest prosty, a więc obrazem okręgu Ω jest prosta AB, i odwrotnie. Obrazem prostej CB jest ona sama.



Rozpatrzmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie C i promieniu AC. Punkt A jest punktem stałym tego przekształcenia, a kąt $\angle CAB$ jest prosty, a więc obrazem okręgu Ω jest prosta AB, i odwrotnie. Obrazem prostej CB jest ona sama. Okrąg ω nie przechodzi przez punkt C, a więc w inwersji przechodzi na pewien okrąg. Jako, że okrąg ω jest styczny do prostej AB, okręgu Ω i prostej CB, to okrąg ω^* będzie styczny do obrazu prostej AB, czyli okręgu Ω; do obrazu okręgu Ω, czyli do prostej AB; i do obrazu prostej CB, czyli do niej samej. Okrąg spełniający wymienione wyżej warunki styczności jest tylko jeden – jest to ω. Oznacza to, że $\omega = \omega^*$.



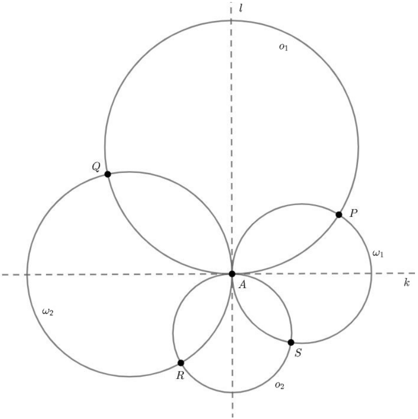
Rozpatrzmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie C i promieniu AC. Punkt A jest punktem stałym tego przekształcenia, a kąt $\angle CAB$ jest prosty, a więc obrazem okręgu Ω jest prosta AB, i odwrotnie. Obrazem prostej CB jest ona sama. Okrąg ω nie przechodzi przez punkt C, a więc w inwersji przechodzi na pewien okrąg. Jako, że okrąg ω jest styczny do prostej AB, okręgu Ω i prostej CB, to okrąg ω^* będzie styczny do obrazu prostej AB, czyli okręgu Ω; do obrazu okręgu Ω, czyli do prostej AB; i do obrazu prostej CB, czyli do niej samej. Okrąg spełniający wymienione wyżej warunki styczności jest tylko jeden – jest to ω. Oznacza to, że $\omega = \omega^*$. Punkt D jako przecięcie CB i ω przejdzie na przecięcie obrazu CB i obrazu ω, czyli na siebie samego – $D = D^*$. To oznacza, że D leży na okręgu inwersyjnym, czyli $DC = AC$.

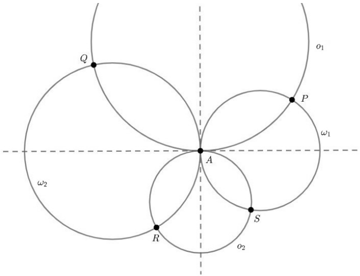
Zadanie

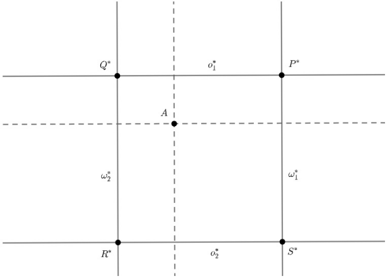
Proste k i l są prostopadłe i przecinają się w punkcie A. Okręgi ω_1 i ω_2 mają środki na prostej k, po przeciwnych stronach punktu A. Dodatkowo A leży zarówno na okręgu ω_1 jak i ω_2. Analogiczną konfigurację tworzą okręgi o_1 i o_2 wraz z prostą l. Punkty przecięcia okręgów oznaczmy przez P, Q, R, S. Pokazać, że P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie

Proste k i l są prostopadłe i przecinają się w punkcie A. Okręgi ω_1 i ω_2 mają środki na prostej k, po przeciwnych stronach punktu A. Dodatkowo A leży zarówno na okręgu ω_1 jak i ω_2. Analogiczną konfigurację tworzą okręgi o_1 i o_2 wraz z prostą l. Punkty przecięcia okręgów oznaczmy przez P, Q, R, S. Pokazać, że P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.







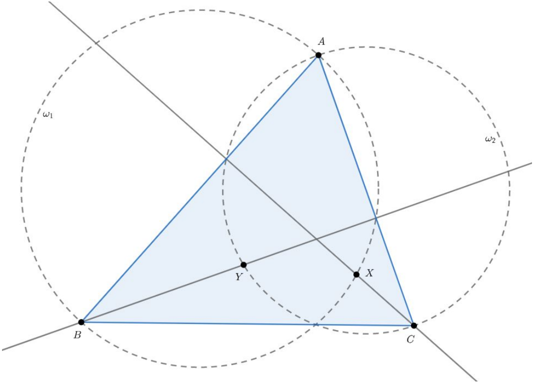
Zastosujmy inwersję o środku w punkcie A i o dowolnym, ustalonym promieniu. Okręgi ω_1 i ω_2 przejdą na proste prostopadłe do k. Będą one również po przeciwnych stronach puntu A. Okręgi o_1 i o_2 przejdą na proste prostopadłe do l i również będą one po przeciwnych stronach puntu A. Zatem punkty P^*, Q^*, R^*, S^* są wierzchołkami prostokąta, a więc leżą na jednym okręgu. Punkt A leży wewnątrz tego prostokąta, a więc nie może leżeć na wspomnianym okręgu. Zatem po ponownym zastosowaniu tej samej inwersji rozważany okrąg przejdzie na okrąg i będą na nim leżały punkty P, Q, R, S.

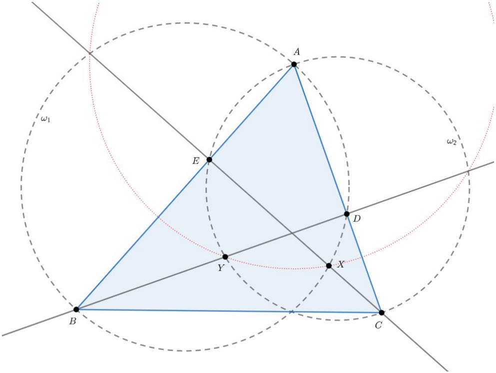
Zadanie

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg ω_1 jest okręgiem o średnicy AB, a ω_2 jest okręgiem o średnicy AC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z punktu C przecina ω_1, wewnątrz trójkąta ABC, w punkcie X, a wysokość trójkąta ABC poprowadzona z punktu B przecina ω_2, wewnątrz trójkąta ABC, w punkcie Y. Pokazać, że $AX = AY$.

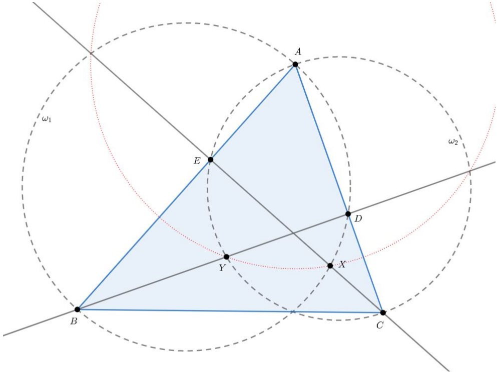
Zadanie

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg ω_1 jest okręgiem o średnicy AB, a ω_2 jest okręgiem o średnicy AC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z punktu C przecina ω_1, wewnątrz trójkąta ABC, w punkcie X, a wysokość trójkąta ABC poprowadzona z punktu B przecina ω_2, wewnątrz trójkąta ABC, w punkcie Y. Pokazać, że $AX = AY$.





Niech D i E będą spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktu B i C. Punkty $BCDE$ leżą na jednym okręgu – kąty BEC i BDC są równe (są proste). Zachodzi zatem równość $AE \cdot AB = AD \cdot AC$. Ustalmy więc $R = \sqrt{AE \cdot AB}$ i rozpatrzmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu R. Obrazem w tej inwersji punktu B jest punkt E, a równość $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ oznacza, że obrazem w tej inwersji punktu C jest punkt D.



Stąd obrazem okręgu ω_1 jest prosta CE (i odwrotnie). Punkt X jest przecięciem prostej CE i okręgu ω_1, a więc X^* jest przecięciem obrazu prostej CE – okręgu ω_1, i obrazu okręgu ω_1 – prostej CE. Stąd $X = X^*$ (okrąg ω_1 przecina się z prostą CE, w dwóch punktach, ale X^* leży na półprostej AX, która jest wewnątrz kąta BAC), a więc leży na okręgu inwersyjnym i $AX = R$. Analogicznie pokazujemy, że $Y = Y^*$, a więc $AY = R$, co dowodzi tezy $AX = AY$.