Teoria mnogości

Mieszko Zimny

Koło Pasjonatów Matematyki UW

May 24, 2021

Teoria mnogości powstała pod koniec XIX wieku za sprawą George'a Cantora. Jej celem było badanie zbiorów, głównie zbiorów nieskończonych. Pierwsza wersja tej teorii, tzw. "naiwna teoria mnogości" zakładała, że możemy tworzyć zbiory zupełnie dowolnie, tzn. mając dowolną formułę logiczną $\varphi(x)$ mogę rozważać zbiór "rzeczy" spełniających formułę φ. Okazało się jednak, że z teorią tą są pewne problemy - jest ona wewnętrznie sprzeczna. W takim razie konieczne stało się przyjęcie pewnych ograniczeń na swobodę tworzonych zbiorów, co doprowadziło do powstania na początku XX wieku tzw. aksjomatyki ZFC, która jest przyjmowaną do tej pory aksjomatyką teorii mnogości.
Nie będziemy się jednak na tym spoktaniu zajmować tymi, dość trudnymi, rozważaniami. Zagłębimy się tylko w jeden aspekt teorii mnogości: tzw. teorię mocy i jej zastosowanie do znanych nam zbiorów.

Idea

Dla zbiorów skończonych mamy prezycyjne pojęcie liczby elementów zbioru pozwalające stwierdzać, kiedy dwa zbiory mają tyle samo elementów.
Czy możemy zrobić coś podobnego dla zbiorów nieskończonych?

Idea

Dla zbiorów skończonych mamy prezycyjne pojęcie liczby elementów zbioru pozwalające stwierdzać, kiedy dwa zbiory mają tyle samo elementów.
Czy możemy zrobić coś podobnego dla zbiorów nieskończonych?

Poniekąd.

Idea

Dla zbiorów skończonych mamy prezycyjne pojęcie liczby elementów zbioru pozwalające stwierdzać, kiedy dwa zbiory mają tyle samo elementów.
Czy możemy zrobić coś podobnego dla zbiorów nieskończonych?

Poniekąd.
Będziemy potrzebowali kilku pojęć i oznaczeń.

Oznaczenia

Zapis $f : A \to B$ oznacza, że f jest funkcją, której dziedziną jest zbiór A i której zbiór wartości zawiera się w zbiorze B.

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych (z zerem)

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Oznaczenia

Zapis $f : A \to B$ oznacza, że f jest funkcją, której dziedziną jest zbiór A i której zbiór wartości zawiera się w zbiorze B.
$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych (z zerem)
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Definicje

Funkcję $f : A \to B$ nazywamy iniekcją, jeżeli jest różnowartościowa.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy suriekcją, jeżeli zbiór wartości f jest równy B.
Funkcją $f : A \to B$ nazywamy bijekcją, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Oznaczenia

Zapis $f : A \to B$ oznacza, że f jest funkcją, której dziedziną jest zbiór A i której zbiór wartości zawiera się w zbiorze B.
$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych (z zerem)
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Definicje

Funkcję $f : A \to B$ nazywamy iniekcją, jeżeli jest różnowartościowa.
Funkcję $f : A \to B$ nazywamy suriekcją, jeżeli zbiór wartości f jest równy B.
Funkcją $f : A \to B$ nazywamy bijekcją, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Intuicyjnie bijekcja jest więc połączeniem w pary elementów dwóch zbiorów.

Obserwacja

Jeżeli f jest bijekcją z A do B, to f^{-1} jest bijekcją z B do A.

Obserwacja

Jeżeli f jest bijekcją z A do B, to f^{-1} jest bijekcją z B do A.

Definicja

Zbiory A i B nazywamy równolicznymi, jeżeli istnieje bijekcja z A do B.

Jest jasne, że zbiory skończone są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tyle samo elementów. Ale pojęcie równoliczności ma też sens dla zbiorów nieskończonych.

Pojęcie równoliczności ma dwie bardzo pożądane własności:

- każdy zbiór jest równoliczny z samym sobą;
- jeżeli A jest równoliczny z B, a B jest równoliczny z C, to A jest równoliczny z C.

Pojęcie równoliczności ma dwie bardzo pożądane własności:

- każdy zbiór jest równoliczny z samym sobą;
- jeżeli A jest równoliczny z B, a B jest równoliczny z C, to A jest równoliczny z C.

Dlaczego?
Jeżeli A jest dowolnym zbiorem, to funkcja $f : A \to A$ dana wzorem $f(x) = x$ jet bijekcją z A to A.
Jeżeli f jest bijekcją z A do B, a g jest bijekcją z B do C, to $h = g \circ f$ jest bijekcją z A do C.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

Dowód:
Bijekcja z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$ jest dana wzorem

$$f(n) = \begin{cases} k & n = 2k \\ -k & n = 2k-1 \end{cases} .$$

$\square$

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych.

Dowód:
Najpierw skonstruujemy bijekcję z $\mathbb{N}$ w liczby wymierne dodatnie. Utwórzmy nieskończoną tabelę, której rzędy i kolumny będą numerowane kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi. Następnie w każde pole tej tabeli wpiszmy liczbę wymierną, której licznik jest równy numerowi rzędu, a mianownik numerowi kolumny. Następnie przechodzimy po kolei po przekątnych tej tabeli, przypisując kolejnym liczbom naturalnym kolejne odwiedzone liczby wymierne, pomijając liczby równe tym, które już odwiedziliśmy. Pokazuje to następujący obrazek.

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{2}{5}$	$\cancel{\frac{2}{6}}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{3}{3}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$	$\frac{4}{3}$	$\cancel{\frac{4}{4}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	...
6	$\frac{6}{1}$	$\cancel{\frac{6}{2}}$	$\cancel{\frac{6}{3}}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	...
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	...
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	...
⋮	⋮								

Mamy więc bijekcję z liczb naturalnych w liczby wymierne dodatnie, oznaczmy ją f. Teraz możemy zadać bijekcję g z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{Q}$ wzorem

$$g(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(k) & n = 2k - 1 \\ -f(k) & n = 2k, k \neq 0 \end{cases}.$$

$\square$

Zadanie

Mamy myśliwego i zająca. Zając na początku znajduje sie w punkcie $(0, 0)$ na płaszczyźnie i w każdym ruchu skacze o pewien ustalony na początku wektor o obu współrzędnych całkowitych. Myśliwy nie widzi zająca i nie zna wektora jego skoku, ale po każdym ruchu zająca może wystrzelić w wybrany punkt płaszczyzny. Czy istnieje strategia gwarantująca myśliwemu upolowanie zająca w skończonym czasie?

Zadanie

Mamy myśliwego i zająca. Zając na początku znajduje sie w punkcie $(0, 0)$ na płaszczyźnie i w każdym ruchu skacze o pewien ustalony na początku wektor o obu współrzędnych całkowitych. Myśliwy nie widzi zająca i nie zna wektora jego skoku, ale po każdym ruchu zająca może wystrzelić w wybrany punkt płaszczyzny. Czy istnieje strategia gwarantująca myśliwemu upolowanie zająca w skończonym czasie?

Rozwiązanie:
Zbiór możliwych wetorów skoku zająca to

$$\{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Jest on przeliczalny: aby się o tym przekonać, wystarczy nieco zmodyfikować dowód równoliczności $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$: tym razem w każde pole nieskończonej tabeli wpisujemy parę (m, n) i nic nie pomijamy, przechodząc po przekątnych. Dostajemy bijekcję z $\mathbb{N}$ do zbioru wektorów o obu współrzędnych naturalnych dodatnich.

Skonstruowanie z niej bijekcji do zbioru wektorów o obu współrzędnych całkowitych jest podobne do zakończenia wspomianego dowodu równoliczności (szczegóły techniczne zostawiamy jako zadanie domowe).
W takim razie istnieje bijekcja f ze zbioru $\mathbb{N}$ do zbioru możliwych skoków zająca. Wystarczy więc, aby myśliwy w k-tym ruchu strzelał w pole, w którym byłby zając, gdyby wykonał k ruchów o wektor $f(k-1)$, czyli w punkt $k \cdot f(k-1)$. Istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że zając porusza się o wektor $f(N)$, a wówczas myśliwy upoluje zająca w ruchu $N+1$.

Zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ mają na tyle istotne własności, że istnieje specjalny termin.

Definicja

Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ mają na tyle istotne własności, że istnieje specjalny termin.

Definicja

Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Obserwacja

Każdy zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

Zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ mają na tyle istotne własności, że istnieje specjalny termin.

Definicja

Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Obserwacja

Każdy zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

Wiemy, że przeliczalne są: każdy zbiór skończony, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ mają na tyle istotne własności, że istnieje specjalny termin.

Definicja

Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Obserwacja

Każdy zbiór przeliczalny jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

Wiemy, że przeliczalne są: każdy zbiór skończony, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Pytanie

Czy każdy zbiór jest przeliczalny?

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny.

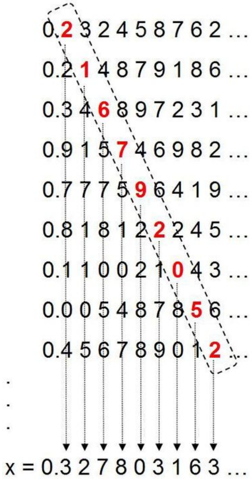
Dowód (metoda przekątniowa Cantora):
Gdyby istniała bijekcja z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, to istniałaby bijekcja z nieskończonego podzbioru $\mathbb{N}$ do przedziału $(0, 1)$, a skoro każdy nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$, to istniałaby bijekcja z $\mathbb{N}$ do $(0, 1)$. Wystarczy więc, że pokażemy, że nie istnieje bijekcja z $\mathbb{N}$ do $(0, 1)$.

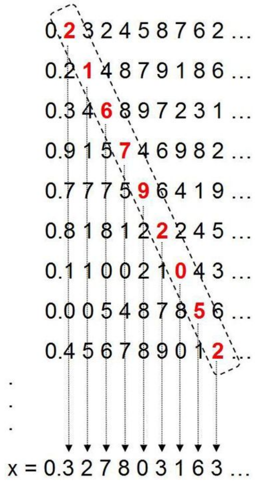
Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny.

Dowód (metoda przekątniowa Cantora):
Gdyby istniała bijekcja z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, to istniałaby bijekcja z nieskończonego podzbioru $\mathbb{N}$ do przedziału $(0,1)$, a skoro każdy nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$, to istniałaby bijekcja z $\mathbb{N}$ do $(0,1)$. Wystarczy więc, że pokażemy, że nie istnieje bijekcja z $\mathbb{N}$ do $(0,1)$.
Załóżmy, że taka bijekcja istnieje i oznaczmy ją f. Popatrzmy na rozwinięcia dziesiętne liczb z przedziału $(0,1)$. Pozwalają nam one patrzeć na $(0,1)$ jak na zbiór nieskończonych ciągów cyfr. Pewna subtelność: rozwinięcie dziesiętne nie jest jednoznaczne, np. $0,0(9) = 0,1$. Umawiamy się więc, że w przypadku istnienia dwóch rozwinięć danej liczby wybieramy to, w którym jest nieskończenie wiele zer.

Bijekcja $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ pozwala nam stworzyć nieskończoną tabelę, w której k-tym rzędzie są kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $f(k-1)$.





Tworzymy teraz liczbę rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$ w sposób następujący: na k-tym miejscu po przecinku wstawiamy cyfrę o 1 większą od tej, która ma na k-tym miejscu k-ta liczba z naszej tabeli (lub 0, jeżeli na tym miejscu jest 9).

Uzyskaliśmy w ten sposób pewne rozwinięcie dziesiętne liczby z $(0,1)$, którego nie ma w naszej tabeli. Istotnie, dla każdego k otrzymane rozwinięcie różni się od k-tego rozwinięcia w tabeli na k-tym miejscu po przecinku. To jednak jeszcze nie jest sprzeczność: być może liczba ta znajduje się w tabeli pod inną postacią. Tak mogłoby być, gdyby w otrzymanej liczbie od pewnego miejsca były same dziewiątki. Ale to oznaczałoby, że w naszej tabeli na przekątnej od pewnego miejsca były same ósemki. To jednak oznaczałoby, że w naszej tabeli jest tylko skończenie wiele liczb, które w swoim rozwinięciu dziesiętnym nie mają ósemek, podczas gdy w całym $(0,1)$ jest ich nieskończenie wiele. Zatem istotnie otrzymaliśmy liczbę, której nie ma w naszej tabeli, a zatem także w obrazie f, co dowodzi, że f nie jest bijekcją, wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

$\square$

Zadanie

Czy na płaszczyźnie istnieje okrąg, którego każdy punkt ma przynajmniej jedną współrzędną niewymierną?

Zadanie

Czy na płaszczyźnie istnieje okrąg, którego każdy punkt ma przynajmniej jedną współrzędną niewymierną?

Rozwiązanie:
Załóżmy, że taki okrąg nie istnieje. Rozważmy zbiór wszystkich okręgów o środku w $(0, 0)$. Wówczas każdy taki okrąg musi mieć punkt o obu współrzędnych wymiernych. Takich punktów jest jednak przeliczalnie wiele, więc okręgów również musiałoby być przeliczalnie wiele. Ale to jest niemożliwe, bo zbiorem długości ich promieni jest $(0, \infty)$, który jest nieprzeliczalny.

Intuicja

Intuicyjnie wydaje się, że jeżeli istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niewiększy niż zbiór B, a jeżeli istnieje suriekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niemniejszy od zbioru B.

Intuicja

Intuicyjnie wydaje się, że jeżeli istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niewiększy niż zbiór B, a jeżeli istnieje suriekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niemniejszy od zbioru B.

Oznaczenia

Jeżeli A jest równoliczny z B, to piszemy $|A| = |B|$.
Jeżeli istnieje iniekcja z A do B, to piszemy $|A| \leq |B|$.
Jeżeli istnieje suriekcja z A do B, to piszemy $|A| \geq |B|$.

Intuicja

Intuicyjnie wydaje się, że jeżeli istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niewiększy niż zbiór B, a jeżeli istnieje suriekcja ze zbioru A w zbiór B, to zbiór A jest niemniejszy od zbioru B.

Oznaczenia

Jeżeli A jest równoliczny z B, to piszemy $|A| = |B|$.
Jeżeli istnieje iniekcja z A do B, to piszemy $|A| \leq |B|$.
Jeżeli istnieje suriekcja z A do B, to piszemy $|A| \geq |B|$.

Twierdzenie (Cantor-Bernstein)

Jeżeli $|A| \leq |B|$ i $|A| \geq |B|$, to $|A| = |B|$.

Niespodziewanie trudne do udowodnienia, uzasadnia wprowadzenie podanych oznaczeń.

Pytanie

Czy istnieje "największy zbiór", to znaczy taki zbiór A, że dla każdego innego zbioru B mamy $|A| \geq |B|$?

Pytanie

Czy istnieje "największy zbiór", to znaczy taki zbiór A, że dla każdego innego zbioru B mamy $|A| \geq |B|$?

Definicja

Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wówczas zbiorem potęgowym A nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów A. Oznaczamy go $\mathcal{P}(A)$.

Pytanie

Czy istnieje "największy zbiór", to znaczy taki zbiór A, że dla każdego innego zbioru B mamy $|A| \geq |B|$?

Definicja

Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wówczas zbiorem potęgowym A nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów A. Oznaczamy go $\mathcal{P}(A)$.

Przykłady

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Oznaczenia

Jeżeli A i B są zbiorami, to

- $|A| < |B|$ oznacza, że $|A| \leq |B|$ i nie jest prawdą, że $|A| = |B|$;
- $|A| > |B|$ oznacza, że $|A| \geq |B|$ i nie jest prawdą, że $|A| = |B|$.

Twierdzenie (Cantor)

Dla dowolnego zbioru A zachodzi

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Twierdzenie (Cantor)

Dla dowolnego zbioru A zachodzi

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Dowód:
Jest jasne, że $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, bo funkcja $g : A \to \mathcal{P}(A)$ dana wzorem

$$g(a) = \{a\}$$

jest iniekcją. Wystarczy teraz, że udowodnimy, że dowolna funkcja z A do $\mathcal{P}(A)$ nie może być suriekcją.

Twierdzenie (Cantor)

Dla dowolnego zbioru A zachodzi

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Dowód:
Jest jasne, że $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, bo funkcja $g : A \to \mathcal{P}(A)$ dana wzorem

$$g(a) = \{a\}$$

jest iniekcją. Wystarczy teraz, że udowodnimy, że dowolna funkcja z A do $\mathcal{P}(A)$ nie może być suriekcją.
Niech więc f będzie funkcją z A do $\mathcal{P}(A)$. Niech $B \in \mathcal{P}(A)$ będzie zbiorem tych elemetów A, które nie należą do swoich obrazów względem funkcji f:

$$B = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Udowodnimy, że B nie może należeć do obrazu f. Istotnie, załóżmy, że istnieje $b \in B$ takie, że $f(b) = B$. Zbadamy teraz, czy $b \in B$.
Jeżeli $b \in B$, to b należy do swojego obrazu względem funkcji f, ale wówczas $b \notin B$ z definicji zbioru B, sprzeczność.
Jeżeli $b \notin B$, to b nie należy do swojego obrazu względem funkcji f, ale wówczas $b \in B$, z definicji zbioru B, sprzeczność.
W obu przypadkach dostajemy sprzeczność, a zatem element b taki, że $f(b) = B$ nie może istnieć. Dowodzi to, że funkcja f nie może być suriekcją, co kończy dowód.

$\square$