Geometria (nie)euklidesowa

Mieszko Zimny

Koło Pasjonatów Matematyki UW

May 3, 2021

Co to jest geometria?

Odpowiedź na to pytanie nie jest prosta, we współczesnej matematyce "geometrią" często nazywa się różne niespecjalnie związane ze sobą dziedziny. Aby zrozumieć dokładniej, czemu tak jest, warto przyjrzeć się historii geometrii.

Co to jest geometria?

Odpowiedź na to pytanie nie jest prosta, we współczesnej matematyce "geometrią" często nazywa się różne niespecjalnie związane ze sobą dziedziny. Aby zrozumieć dokładniej, czemu tak jest, warto przyjrzeć się historii geometrii.

Etymologia

$$\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$$

$\gamma\epsilon\omega$ - ziemia;
$\mu\epsilon\tau\rho o\nu$ - miara, mierzenie.

Z tego, co wiemy (i co potwierdza etymologia) grecka geometria wywodzi się z metod mierzenia ziemi. Początkowo był to zbiór praktycznych instrukcji dotyczących pomiarów gruntu. Z czasem pojawili się ludzie uprawiający geometrię w sposób aksjomatyczny.

Z tego, co wiemy (i co potwierdza etymologia) grecka geometria wywodzi się z metod mierzenia ziemi. Początkowo był to zbiór praktycznych instrukcji dotyczących pomiarów gruntu. Z czasem pojawili się ludzie uprawiający geometrię w sposób aksjomatyczny.

Czym jest teoria aksjomatyczna?

Budowę teorii aksjomatycznej rozpoczynamy od pojęć pierwotnych - są to pewne pojęcia, których nie definiujemy.
Następnie wprowadzamy aksjomaty, tzn. stwierdzenia, które mówią o wzajemnych relacjach pojęć pierwotnych, których nie dowodzimy (bo nie mamy jak).
Następnie budujemy całą teorię wyciągając kolejne wnioski z aksjomatów.

Z tego, co wiemy (i co potwierdza etymologia) grecka geometria wywodzi się z metod mierzenia ziemi. Początkowo był to zbiór praktycznych instrukcji dotyczących pomiarów gruntu. Z czasem pojawili się ludzie uprawiający geometrię w sposób aksjomatyczny.

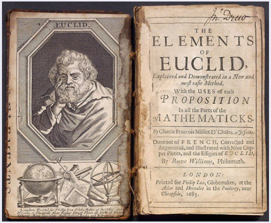
Czym jest teoria aksjomatyczna?

Budowę teorii aksjomatycznej rozpoczynamy od pojęć pierwotnych - są to pewne pojęcia, których nie definiujemy.
Następnie wprowadzamy aksjomaty, tzn. stwierdzenia, które mówią o wzajemnych relacjach pojęć pierwotnych, których nie dowodzimy (bo nie mamy jak).
Następnie budujemy całą teorię wyciągając kolejne wnioski z aksjomatów.

Pierwszą teorią aksjomatyczną w historii była właśnie geometria.

Elementy

- czas powstania: pod koniec IV w. p. n. e.
- autor: Euklides
- cała ówczesna wiedza geometryczna i arytmetyczna
- aksjomatyczna budowa
- 35 definicji
- 5 postulatów
- 5 aksjomatów



Definicje Euklidesa

1. Punkt jest tym, co nie ma części.
2. Linia to długość bez szerokości.

⋮

10. Kiedy linia prosta padająca na drugą linię prostą tworzy z nią kąty przyległe równe między sobą, to każdy z kątów równych nazywamy prostym, a padającą linię prostą nazywamy prostopadłą do tej linii, na którą pada.

⋮

35. Równoległe to proste leżące w jednej płaszczyźnie, które dowolnie przedłużone nie przetną się.

Postulaty Euklidesa (współcześnie zwykle nazywane Aksjomatami)

1. Dowolne dwa punkty można połączyć prostą.
2. Dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie.
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwu kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży.

Postulaty Euklidesa (współcześnie zwykle nazywane Aksjomatami)

1. Dowolne dwa punkty można połączyć prostą.
2. Dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie.
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwu kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży.

Niektóre z tych aksjomatów wydają się brzmieć nieco dziwnie.

Uwagi do Postulatów Euklidesa

Ad. 2. Grecy mieli problem z pojęciem nieskończoności i starali się nie używać obiektów, które byłyby wprost nieskończone, jak np. cała prosta. Myśleli o prostej raczej jako o czymś, co potecjalnie może być dowolnie przedłużone, dokładnie tak, jak stanowi aksjomat.
Ad. 4. W świetle współczesnej definicji (kąt prosty to kąt o mierze 90°) ten aksjomat wydaje się niepotrzebny, jednakże Euklides nie posługiwał się miarą kąta, a kąt prosty zdefiniował w inny sposób.
Ad. 5. Dużo bardziej złożony od pozostałych aksjomatów, wiązało się z nim wiele kontrowersji, więcej o tym później.

Aksjomaty Euklidesa (współcześnie zazwyczaj wcale nienazywane)

1. Wielkości równe tej samej wielkości są wzajemnie równe.
2. Równe dodane do równych dają równe sumy.
3. Równe odjęte od od równych dają równe różnice.
4. Rzeczy, które się pokrywają, są równe.
5. Całość jest większa od części.

Ze współczesnego punktu widzenia system stworzony przez Euklidesa trudno nazwać ścisłym. Brakuje w nim konkretnego wskazania pojęć pierwotnych, doprecyzowania relacji między nimi (Euklides np. nigdzie nie stwierdza, że do płaszczyzny musi należeć punkt), niektóre użyte pojęcia pozostają niezdefiniowane ("przedłużyć", "zaznaczyć"). Co więcej, w dalszej części "Elementów" autor niejednokrotnie korzysta z faktów niewynikających bezpośrednio z aksjomatów, np. posługuje się swobodnie porządkiem punktów na prostej.
Niemniej jednak, przez ponad 2 tysiące lat system ten był całkowicie wystarczający.

Przypomnijmy V aksjomat Euklidesa:
"Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwu kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży".

Przypomnijmy V aksjomat Euklidesa:
"Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwu kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży".

Proklos (412-485)

- Napisał komentarze do I księgi "Elementów".
- Zauważył, że V aksjomat jest dużo bardziej skomplikowany od pozostałych.
- Jego zdaniem aksjomat powinien być prosty i oczywisty.
- Uznał, że V aksjomat należy zastąpić innym lub wykazać, że wynika z pierwszych czterech.
- Prób wykazania, że V aksjomat Euklidesa wynika z pierwszych czterech stał się jednym z największych problemów matematyki: próbował tego dokonać praktycznie każdy liczący się matematyk od V do XIX wieku.

Niektóre twierdzenia równoważne V aksjomatowi

1. Odległość między nieprzecinającymi się prostymi jest ograniczona z góry.
2. Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa dwóm kątom prostym.
3. Wysokości trójkąta przecinają się.
4. Na każdym trójkącie można opisać okrąg.
5. Przez dowolny punkt wnętrza kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona.
6. Istnieje prostokąt.
7. Do danej prostej przez dany punkt można poprowadzić co najwyżej jedną prostą rozłączną.

Wróćmy do prób wykazania, że V aksjomat wynika z pozostałych. Każda taka próba w ciągu wieków wyglądała podobnie - ktoś ogłaszał, że udowonił V aksjomat, aby po pewnym czasie inni pokazali mu, że w pewnym miejscu swojego rozumowanie skorzystał z jakiejś przesłanki, która z pierwszych czterech aksjomatów nie wynika.

Wróćmy do prób wykazania, że V aksjomat wynika z pozostałych. Każda taka próba w ciągu wieków wyglądała podobnie - ktoś ogłaszał, że udowonił V aksjomat, aby po pewnym czasie inni pokazali mu, że w pewnym miejscu swojego rozumowanie skorzystał z jakiejś przesłanki, która z pierwszych czterech aksjomatów nie wynika.

Girolamo Saccheri (1667-1733)

- Uznał, że postąpi inaczej - dołączy do czterech aksjomatów zaprzecznie piątego i otrzyma sprzeczność.
- "Euclides ab omni naevo vindicatus" ("Euklides ze wszystkich zmaz oczyszczony") (1733) - zbiór 32 uzyskanych w ten sposób twierdzeń
- Praca kończyła się twierdzeniem mówiącym, że istnieją proste asymptotyczne, tzn. proste, które cały czas się do siebie zbliżają, nie przecinając się.
- Saccheri uznał, że to "przeczy samej istocie linii prostej" i zamyka sprawę V aksjomatu.

Praca Saccheriego przyniosła skutek odwrotny do zamierzonego - matematycy zaczęli podejrzewać, że możemy do pierwszych czterech aksjomatów Euklidesa dołożyć zaprzecznie piątego i otrzymać spójną, wartą badania teorię. Było to jednak początkowo bardzo kontrowersyjne.

Praca Saccheriego przyniosła skutek odwrotny do zamierzonego - matematycy zaczęli podejrzewać, że możemy do pierwszych czterech aksjomatów Euklidesa dołożyć zaprzecznie piątego i otrzymać spójną, wartą badania teorię. Było to jednak początkowo bardzo kontrowersyjne.

Dlaczego?

Geometria była ówcześnie uważana za podstawę matematyki, a matematyka za naukę przyrodniczą, która bada strukturę rzeczywistości. Przy takim myśleniu ciężko było przyjąć, że mogą równolegle istnieć dwie różne teorie geometryczne - powinna być tylko jedna, "prawdziwa", dana przez naturę.
W 1781 roku ukazuje się "Krytyka czystego rozumu" Kanta. Kant uznał geometrię euklidesową za wiedzę a priori, tzn. w uproszczeniu za naturalną wiedzę ludzkiego umysłu poprzedzającą wszelkie doświadczenie.

Przez około sto lat geometria nieeuklidesowa była uprawiana pomimo powszechnej zgody na fakt jej nieistnienia.

Przez około sto lat geometria nieeuklidesowa była uprawiana pomimo powszechnej zgody na fakt jej nieistnienia.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

W 1761 opublikował pracę "Teoria równoległych", w której m. in. wprowadził pojęcie defektu trójkąta.

Przez około sto lat geometria nieeuklidesowa była uprawiana pomimo powszechnej zgody na fakt jej nieistnienia.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

W 1761 opublikował pracę "Teoria równoległych", w której m. in. wprowadził pojęcie defektu trójkąta.

Franz Taurinus (1794-1874)

Wyprowadził wzór znany dzisiaj jako hiperboliczna zasada cosinusów.

Przez około sto lat geometria nieeuklidesowa była uprawiana pomimo powszechnej zgody na fakt jej nieistnienia.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

W 1761 opublikował pracę "Teoria równoległych", w której m. in. wprowadził pojęcie defektu trójkąta.

Franz Taurinus (1794-1874)

Wyprowadził wzór znany dzisiaj jako hiperboliczna zasada cosinusów.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Wiemy z odkrytych pośmiertnie listów oraz notatek, że posiadał wiele wyników dotyczących geometrii nieeklidesowej, jednak nigdy ich nie opublikował, bojąc się negatywnego odbioru.

Poważne traktowanie geometrii nieeklidesowej rozpoczęło się od dwóch uczonych.

Poważne traktowanie geometrii nieeklidesowej rozpoczęło się od dwóch uczonych.

Nikołaj Łobaczewski (1792-1856)

Będąc rektorem Uniwersytetu w Kazaniu, opublikował w 1829 pracę opisującą podstawy geometrii nieeklidesowej, której niemieckie tłumaczenie ukazało się w 1840.

Poważne traktowanie geometrii nieeklidesowej rozpoczęło się od dwóch uczonych.

Nikołaj Łobaczewski (1792-1856)

Będąc rektorem Uniwersytetu w Kazaniu, opublikował w 1829 pracę opisującą podstawy geometrii nieeklidesowej, której niemieckie tłumaczenie ukazało się w 1840.

Janos Bolyai (1802-1860)

W 1832 opublikował pracę opisującą idee tożsame z tymi rozważanymi przez Łobaczewskiego. Ukazała się ona jako dodatek do podręcznika ojca Janosa.

Poważne traktowanie geometrii nieeklidesowej rozpoczęło się od dwóch uczonych.

Nikołaj Łobaczewski (1792-1856)

Będąc rektorem Uniwersytetu w Kazaniu, opublikował w 1829 pracę opisującą podstawy geometrii nieeklidesowej, której niemieckie tłumaczenie ukazało się w 1840.

Janos Bolyai (1802-1860)

W 1832 opublikował pracę opisującą idee tożsame z tymi rozważanymi przez Łobaczewskiego. Ukazała się ona jako dodatek do podręcznika ojca Janosa.

Prace początkowo nie zostały przyjętę pozytywnie, ale z czasem, zwłaszcza po pośmiertnym odkryciu notatek Gaussa, zostały docenione.

Zajmijmy się teraz rozwijaną przez nich teorią, nazywaną współcześnie geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego lub geometrią hiperboliczną.

Zajmijmy się teraz rozwijaną przez nich teorią, nazywaną współcześnie geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego lub geometrią hiperboliczną.

Czy można ją "zobaczyć"?

Zajmijmy się teraz rozwijaną przez nich teorią, nazywaną współcześnie geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego lub geometrią hiperboliczną.
Czy można ją "zobaczyć"?
Poniekąd tak.

Model

Kilku matematyków (m. in. Klein, Poincare) zbudowało modele geometrii hiperbolicznej w geometrii euklidesowej, tzn. wskazali w zwykłej geometrii euklidesowej takie obiekty i relacje, że jeżeli nadać im odpowiednie nazwy ("płaszczyzna", "prosta", "kąt", "prostopadłość") to zachowują się one dokładnie tak, jak obiekty geometrii Bolyaia-Łobaczewskiego.

Dysk Poincarego

Płaszczyzną jest dla nas wnętrze ustalonego koła.
Proste to średnice tego koła oraz łuki okręgów prostopadłych do danego koła zawarte wewnątrz niego.
Kąt między prostymi to zwykły, euklidesowy kąt między łukami okręgów.
Jeżeli P, Q są punktami leżącymi na prostej o końcach A, B tak, że leżą one na tej prostej w kolejnośći A, P, Q, B, to odległość P od Q jest równa

$$\log \frac{|AQ| \cdot |PB|}{|AP| \cdot |QB|}.$$

Dysk Poincarego

Płaszczyzną jest dla nas wnętrze ustalonego koła.
Proste to średnice tego koła oraz łuki okręgów prostopadłych do danego koła zawarte wewnątrz niego.
Kąt między prostymi to zwykły, euklidesowy kąt między łukami okręgów.
Jeżeli P, Q są punktami leżącymi na prostej o końcach A, B tak, że leżą one na tej prostej w kolejności A, P, Q, B, to odległość P od Q jest równa

$$\log \frac{|AQ| \cdot |PB|}{|AP| \cdot |QB|}.$$

Ważny fakt

Okręgi w dysku Poincarego wyglądają tak samo, jak okręgi euklidesowe, mają tylko przesunięty środek.

Model Poincarego na płaszczyźnie

Płaszczyzną jest dla nas półpłaszczyzna otwarta, prostą tworzącą jej brzeg nazywamy absolutem.
Proste to półproste oraz półokręgi prostopadłe do absolutu.
Kąt między prostymi to zwykły, euklidesowy kąt między krzywymi.
Odległość obliczamy podobnie, jak w poprzednim modelu.

Model Poincarego na płaszczyźnie

Płaszczyzną jest dla nas półpłaszczyzna otwarta, prostą tworzącą jej brzeg nazywamy absolutem.
Proste to półproste oraz półokręgi prostopadłe do absolutu.
Kąt między prostymi to zwykły, euklidesowy kąt między krzywymi.
Odległość obliczamy podobnie, jak w poprzednim modelu.

Bardzo ważna obserwacja

Rozróżnienie między teorią a modelem.

Obserwacja

Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego jest naturalną geometrią powierzchni wklęsłych.

Obserwacja

Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego jest naturalną geometrią powierzchni wklęsłych.

Pomysł

Skoro tak, to warto też skonstruować geometrię powierzchni wypukłych.

Obserwacja

Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego jest naturalną geometrią powierzchni wklęsłych.

Pomysł

Skoro tak, to warto też skonstruować geometrię powierzchni wypukłych.

Geometria sferyczna

Płaszczyzną jest ustalona sfera.
Prostymi są okręgi wielkie sfery.
Kąty między prostymi to zwykłe kąty między okręgami.
Odległości między punktami to zwykła długość łuku na sferze.

Obserwacja

Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego jest naturalną geometrią powierzchni wklęsłych.

Pomysł

Skoro tak, to warto też skonstruować geometrię powierzchni wypukłych.

Geometria sferyczna

Płaszczyzną jest ustalona sfera.
Prostymi są okręgi wielkie sfery.
Kąty między prostymi to zwykłe kąty między okręgami.
Odległości między punktami to zwykła długość łuku na sferze.

Dokonując pewnych zmian w geometrii sferycznej, możemy stworzyć geometrię eliptyczną, opisującą dowolne wypukłe powierzchnie.

Oberwacja

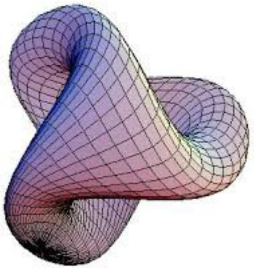
Mamy geometrię powierzchni wypukłych, wklęsłych i płaskich. Co możemy zrobić dalej?

Oberwacja

Mamy geometrię powierzchni wypukłych, wklęsłych i płaskich. Co możemy zrobić dalej?

Bernhard Riemann (1826-1866)

W 1854 roku wygłosił wykład habilitacyjny pod tytułem "O hipotezach, jakie leżą u podstaw geometrii". Zdefiniował w nim obiekty nazywane dzisiaj "rozmaitościami riemannowskimi".



Rozmaitości riemannowskie to obiekty "pozszywane" w odpowiednio ładny sposób ze zniekształconych kawałków przestrzeni euklidesowej. Jeżeli wybierzemy jakiś punkt takiej rozmaitości, to lokalnie, w małym otoczeniu takiego punktu będzie obowiązywać geometria euklidesowa, hiperboliczna lub eliptyczna. Badanie geometrii takich obiektów nazywa się współcześnie geometrią riemannowską.

Rozmaitości riemannowskie to obiekty "pozszywane" w odpowiednio ładny sposób ze zniekształconych kawałków przestrzeni euklidesowej. Jeżeli wybierzemy jakiś punkt takiej rozmaitości, to lokalnie, w małym otoczeniu takiego punktu będzie obowiązywać geometria euklidesowa, hiperboliczna lub eliptyczna. Badanie geometrii takich obiektów nazywa się współcześnie geometrią riemannowską.

Hermann von Helmholtz (1821-1894)

W 1868 wydał wykład Riemanna drukiem wraz ze swoimi komentarzami, w których stwierdził, że matematyki nie jest nauką przyrodniczą, więc nie ma żadnego problemu w równoległym istnieniu różnych teorii geometrii. Mało tego, z punktu widzenia zastosowań sytuacja taka jest pożądana, ponieważ różne teorie geometryczne są przydatne w różnch sytuacjach i np. fizyk, który chce opisać matematycznie swoje wyniki, może wybrać taki model, jaki mu w danej sytuacji odpowiada.

Epilog

W drugiej połowie XIX wieku nastąpił rozwój logiki matematycznej. Zauważono wtedy problemy z oryginalną teorią Euklidesa. W 1899 roku David Hilbert opublikował swoją aksjomatykę geometrii, która jest już ścisłą, zupełną teorią. Nazywa się ją aksjomatyką Hilberta.